Matemática 3 . Ciências Moleculares

Livro Tom Apostol, volume 2, 2ª edição

Site: WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3.HTML.

Espaços Vetoriais

Idéia: Conjunto V em que se pode somar os elementos e multiplicá-los por um número real (ou racional, complexo, ...). Vamos nos restringir ao caso real.

O que quer dizer soma? Quer dizer que $\exists$ uma função $s: V \times V \to V$, chamada de operação de soma, que satisfaz certos axiomas.

Notação: $s(x,y) \equiv x+y$.

E multiplicação? É uma função $m: \mathbb{R} \times V \to V$. Notação: $m(a,x) \equiv ax$.

Definição: Um espaço vetorial V é um conjunto não vazio onde estão definidas duas funções $s: V \times V \to V$, adição, e $m: \mathbb{R} \times V \to V$, multiplicação por escalar e que satisfazem

S1 Lei comutativa: $x+y=y+x$, $\forall x,y \in V$	$s(x,y)=s(y,x)$
S2 Lei associativa: $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x,y,z \in V$	$s(s(x,y),z)=s(x,s(y,z))$
S3 $\exists$ elemento neutro: $x+0=x$, $\forall x \in V$.	$s(x,0)=x$
S4 $\exists$ inversas: dado $x \in V$, $\exists -x \in V$ t.q. $x+(-x)=0$, $\forall x \in V$	$s(x,-x)=0$
M1. Lei associativa: $a(bx)=(ab)x$, $\forall a,b \in \mathbb{R}, x \in V$	$m(a,m(b,x))=m(ab,x)$
M2. Lei distributiva para V: $a(x+y)=ax+ay$, $\forall a \in \mathbb{R}, x,y \in V$	$m(a,s(x,y))=s(m(a,x),m(a,y))$
M3. Lei distributiva para $\mathbb{R}$: $(a+b)x=ax+bx$, $\forall a,b \in \mathbb{R}, x \in V$	$m(a+b,x)=s(m(a,x),m(b,x))$
M4. $\exists$ identidade: $1x=x$, $\forall x \in V$	$m(1,x)=x$

Chamamos os elementos de $\mathbb{R}$ de escalares, e os de V de vetores.

Exemplos de espaços vetoriais.

1) $\mathbb{R}$, com adição e multiplicação usuais

2) $\mathbb{C}$, com adição usual e multiplicação por $\mathbb{R}$ usual.

3) $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots, x_m);\ x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\}$, com soma $(x_1, \dots, x_m) + (y_1, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m)$
multiplicação $\alpha(x_1, \dots, x_m) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_m)$.

4) Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}(X;\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as funções com valores reais. $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ é um espaço vetorial

soma $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

multiplicação $(af)(x) := af(x)$.

4a) $\mathbb{R}[x] = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ p(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j x^j\}$

4b) $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ é contínua}\}$, $a \leq b$

4c) $\mathcal{D} = \{f \in C^2([a,b]);\ f'' + af' + bf = 0\}$

Basta observar que a soma e a multiplicação por escalar estão bem definidas.

Propriedades Básicas de um espaço vetorial

- O elemento nulo é único.

Demo: Sejam 0_1 e 0_2 dois elementos nulos. Logo

$x + 0_1 = x,\ \forall x \in V \Rightarrow$ Se $x = 0_2$, então $0_2 + 0_1 = 0_2$

$x + 0_2 = x,\ \forall x \in V \Rightarrow$ Se $x = 0_1$, então $0_1 + 0_2 = 0_1$

$$0_1 = 0_1 + 0_2 \underset{S1}{=} 0_2 + 0_1 = 0_2 \quad \blacksquare$$

- O elemento inverso $-x$ de x é único, $\forall x \in V$

Demo: Seja $x \in V$ e y e z inversos de x. Logo

$x + y = 0$

$x + z = 0$

$$y = y + 0 = y + (x+z) \underset{S2}{=} (y+x) + z \underset{S1}{=} (x+y) + z = 0 + z \underset{S1}{=} z + 0 = z \quad \blacksquare$$

Mais propriedades:

a) $0x = 0,\ \forall x \in V$

b) $a0 = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$

c) $(-a)x = -(ax) = a(-x),\ \forall a \in \mathbb{R}, x \in V.$

d) Se $ax = 0$, então $a = 0$ ou $x = 0$.

e) Se $ax = bx$, e $x \neq 0$, então $a = b$.

f) Se $ax = ay$ e $a \neq 0$, então $x = y$.

g) $-(x+y) = -x + -y$

h) $\underbrace{x + x + x + \dots + x}_{n \text{ vezes}} = nx$

Demo: a) $0x + 0x = (0+0)x = 0x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (0x+0x)+(-0x) = 0x+(-0x) = 0 \\ \quad\quad \| \\ 0x+(0x+-0x) = 0x+0 = 0x \end{array}\right\} 0x = 0.$

b) $a0 + a0 = a(0+0) = a0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a0+a0)+(-a0) = a0+(-a0) = 0 \\ \quad\quad \| \\ a0+(a0+-a0) = a0+0 = a0 \end{array}\right\} a0 = 0.$

c) $ax + (-a)x = (a+-a)x = 0x = 0 \Rightarrow (-a)x = -(ax)$
$ax + a(-x) = a(x+-x) = a0 = 0 \Rightarrow a(-x) = -(ax)$

d) Se $ax = 0$ e $a \neq 0$, então $x = 1x = \frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}0 = 0$
Logo ou $a = 0$, ou $x = 0$.

e) $ax = bx \Rightarrow ax + (-b)x = bx + (-b)x = 0 \Rightarrow (a-b)x = 0 \Rightarrow a = b$, pois $x \neq 0$

f) $ax = ay \Rightarrow ax + a(-x) = ay + a(-x) = a(y+-x) \Rightarrow a(y+-x) = 0 \Rightarrow$
$y + -x = 0 \Rightarrow (y+-x)+x = 0+x = x \Rightarrow y = y+(-x+x) = (y+-x)+x = x$

g) $x + y + -x + -y = x + -x + y + -y = 0 + 0 = 0$

h) Indução. $\sum_{i=1}^{n} x = \sum_{i=1}^{n-1} x + x = (n-1)x + x = (n-1+1)x = nx$

Complete os detalhes da indução finita!

Notação: $x + (-y) := x - y$.

Subespaços Vetoriais

Definição: Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $S \subset V$ é um subespaço vetorial se

1) $x+y \in S$, $\forall x, y \in S$
2) $ax \in S$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $x \in V$.
3) $S \neq \emptyset$

Proposição: Se $S \subset V$ é um subespaço vetorial, então S também é um espaço vetorial.

Demo: Claramente vale $S1, S2, M1, M2, M3, M4$, pois vale para V.

Para mostrar que $\exists$ elemento neutro em S, basta observar que se $x \in S$, então $0 = 0x \in S$.

Para mostrar que $\exists$ elemento inverso em S, basta observar que se $x \in S$, então $-x = (-1)x \in S$. $\blacksquare$

Observação: $S \subset V$ é um subespaço $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l} S \neq \emptyset \\ ax+y \in S, \forall a \in \mathbb{R}, x, y \in V \end{array}$

$(\Leftarrow)$ $a=1$, então $x+y = 1x+y \in S$
$y=0$, então $ax = ax+0 \in S$

$(\Rightarrow)$ $\underbrace{\underbrace{ax}_{\in S} + \underbrace{y}_{\in S}}_{\in S}$ imediato. OK $\blacksquare$

Definição: Seja $S = \{x_1, \dots, x_m\} \subset V$. Se $x = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j$, $a_j \in \mathbb{R}$, então dizemos que x é combinação linear dos elementos de S. O conjunto das combinações lineares de S é denotado por $L(S)$ e chamado de subespaço gerado por S.

Proposição: $L(S)$ é, de fato, um subespaço.

Demo: $a\left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_j\right) + \sum_{j=1}^{m} b_j x_j = \sum_{j=1}^{m} (a a_j + b_j) x_j \in S$ $\blacksquare$

Exemplo: $\mathbb{R}[x]$, $C(\mathbb{R})$, $C^0(\mathbb{R})$, são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Conjunto dependente e linearmente independente

Definição: Seja V um espaço vetorial e $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Dizemos que S é linearmente dependente se $\exists (c_1, \dots, c_m) \neq (0, \dots, 0)$ e $u_1, \dots, u_m \in S$ tais que $c_1 u_1 + \dots + c_m u_m = 0$.

Exemplo 1) Se $0 \in S$, então S é L.D., pois $1.0 = 0$ ($c_1 = 1$, $u_1 = 0$ e $m = 1$).

Exemplo 2) Se S é L.D. e $S \subset T$, então T é L.D.

Exemplo 3) Se u e $au \in S$, então S é L.D., pois se $a = 0$, então $au = 0$. Se $a \neq 0$, então $(-a)u + 1.(au) = 0$.

Proposição (Generaliza exemplo 3). Se $0 \notin S$, então S é L.D. se, e somente se, $\exists$ $u \in S$ tal que $u = \sum_{j=1}^{M} c_j u_j$, $u_j \in S$, $u_j \neq u$, $u_j \neq u_k$ para $j \neq k$, $c_j \neq 0$.

(ou seja, $\exists$ um elemento u que "depende" dos demais).

Demo: $(\Rightarrow)$ $\exists$ $c_1 u_1 + \dots + c_m u_m = 0$, $(c_1, \dots, c_m) \neq (0, \dots, 0)$. Seja $c_j \neq 0$. Logo

$$u_j = -\sum_{k \neq j} \frac{c_k}{c_j} u_k.$$

$(\Leftarrow)$ Se $u = \sum_{j=1}^{M} c_j u_j$, então $1u + \sum_{j=1}^{M} (-c_j) u_j = 0$. ▨

Definição: Seja V um espaço vetorial e $S \subset V$. Dizemos que S é linearmente independente (L.I.) se não for L.D. Assim, S é L.I. se, e somente se, a seguinte implicação é válida:

$$\begin{array}{l} c_1 u_1 + \dots + c_m u_m = 0 \\ u_j \neq u_k,\ j \neq k \end{array} \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0.$$

Exemplo 1) $\emptyset$ é L.I.

Observação: S é L.I. se nenhum elemento pode ser escrito em termos dos outros, isto é, eles "independem" entre si.

Exemplo

i) $(0,1,0), (1,0,0), (1,1,0)$ e $(0,0,1)$ são L.D.

$$(1,1,0) = 1.(0,1,0) + 1.(1,0,0).$$

ii) $\{1, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ são L.D.

$$1 = 1 \operatorname{sen}^2 t + 1 \cos^2 t.$$

iii) $\{1, t, t^2, \ldots, t^m\}$ são L.I.

$$f(t) = a_0 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m = 0. \Rightarrow \begin{array}{l} f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ \vdots \\ f^{(m)}(0) = 0 \Rightarrow a_m = 0. \end{array}$$

iv) $\{e^{\alpha_1 t}, \ldots, e^{\alpha_m t}\}$ são L.I. se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são disjuntos

$$a_1 e^{\alpha_1 t} + \ldots + a_m e^{\alpha_m t} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 e^{\alpha_1 t} + \ldots + a_m e^{\alpha_m t} = 0 \\ a_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + \ldots + a_m \alpha_m e^{\alpha_m t} = 0 \\ \vdots \\ a_1 \alpha_1^{m-1} e^{\alpha_1 t} + \ldots + a_m \alpha_m^{m-1} e^{\alpha_m t} = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \ldots & \alpha_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo $(a_1, \ldots, a_m) = (0, \ldots, 0)$

Teorema Fundamental: Seja $S = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$ um conjunto L.I. Todo conjunto com mais de k elementos contido em $L(S)$ é L.D..

Base e Dimensão

Definição: Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $B \subset V$ é uma base finita de V se $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ é um conjunto finito tal que

1) $L(B) = V$ (se $v \in V$, então $v = a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m$).

2) B é L.I.

Obs: Podemos definir de forma semelhante uma base sem usar o fato dela ser finita. Um espaço vetorial sempre possui uma base (não necessariamente finita). Usa teoria dos conjuntos (Zorn).

Dizemos que V é de dimensão finita, se V possui base finita.

Teorema: Se V é um espaço vetorial de dimensão finita. Logo toda base tem o mesmo número de elementos.

Demo: Sejam B_1 e B_2 duas bases de V, em que B_1 tem m_1 elementos e B_2 tem m_2 elementos.

Logo, como $\left.\begin{array}{l} B_1 \subset L(B_2) \text{ e } B_1 \text{ é L.I., então } m_1 \leq m_2. \\ B_2 \subset L(B_1) \text{ e } B_2 \text{ é L.I., então } m_2 \leq m_1. \end{array}\right\} m_1 = m_2.$ $\boxtimes$

Definição: A dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita V é o número de elementos de uma base qualquer de V.

Exemplo 1: $\mathbb{R}^n$. Base "usual" $\{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$.

$\dim \mathbb{R}^n = n$

Exemplo 2: Polinômios de grau m. Base "usual" $\{1, t, t^2, \dots, t^m\}$

$\dim P_m = m+1$.

Obs: Espaços como $C(\mathbb{R})$, $C^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ não possuem base finita. Dizemos que são de dimensão infinita.

Propriedades Básicas de Base: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ uma base. Consideremos $B = (u_1, \dots, u_m)$ uma base ordenada, ou seja, damos uma ordem para os elementos de B.

Fato 1: Todo elemento de V pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos elementos de B.

Demo: Seja $v \in V = L(B)$. Logo $v = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$. Se $v = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i$, então $\sum_{i=1}^{m} (a_i - b_i) u_i = 0 \Rightarrow a_i = b_i$, pois B é L.I.

À sequência de números $(c_1,\dots,c_m)$ associada a u, chamamo-la de coordenadas de u.

E como achar base?

<u>Teorema:</u> Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, $\dim V = n$. Logo

(a) Todo conjunto L.I. é um subconjunto de alguma base de V.

(b) Todo conjunto L.I. de n elementos é uma base de V.

<u>Dem:</u> a) Seja $S=\{u_1,\dots,u_k\}\subset V$ um conjunto L.I. Logo pelo Teorema Fundamental, $k\leq n$. Se $L(S)=V$, então S já é uma base. Se $L(S)\neq V$, então escolhemos $u\in V\setminus L(S)$. Vamos mostrar que $S'=\{u_1,\dots,u_k,u\}$ é L.I. De fato, se

$$\sum_{j=1}^{k} a_j u_j + a u = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } a=0, \text{ então } \sum_{j=1}^{k} a_j u_j = 0 \Rightarrow a_j=0, \forall j, \text{ pois } S \text{ é L.I.} \\ \text{se } a\neq 0, \text{ então } u = \sum_{j=1}^{k}\left(-\frac{a_j}{a}\right)u_j. \text{ Logo } u\in L(S). \text{ ABSURDO} \end{cases}$$

Assim, $(a, a_1,\dots,a_k)=(0,\dots,0)$, ou seja, S' é L.I.

Se $L(S')\neq V$, então acrescentamos mais um elemento. Fazemos isto até obter um conjunto $\tilde{S}$ de n elementos L.I. Se $L(\tilde{S})\neq V$, então $\exists$ um conjunto L.I. de $n+1$ elementos. Isto é um absurdo pelo Teorema Fundamental. Logo $L(\tilde{S})=V$ e $\tilde{S}$ é uma base.

b) Se $\tilde{S}$ tem n elementos e é L.I., então $L(\tilde{S})=V$, ou seja, é uma base, ou $L(\tilde{S})\neq V$. No último caso, $\exists\, u\in V\setminus L(\tilde{S})$. Logo $\tilde{S}\cup\{u\}$ é L.I. Absurdo pelo Teorema Fundamental. $\blacksquare$

Demo do Teorema Fundamental:

Basta provar: Se $|S| = k$, é L.I., então todo conjunto com $k+1$ elementos em $L(S)$ é L.I.

$k=1$ Seja $S = \{x_1\}$ e $v_1, v_2 \in V$.

Se v_1 ou $v_2 = 0$, então $\{v_1, v_2\}$ é L.D.

Se v_1 e $v_2 \neq 0$, então $v_1 = a_1 x_1$ e $v_2 = a_2 x_1$, com $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Logo

$$a_2 v_1 - a_1 v_2 = a_1 a_2 x_1 - a_2 a_1 x_1 = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2\} \text{ é L.D.}$$

Se o teorema vale para $k-1$, então vale para k.

Seja $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ e $T = \{v_1, \dots, v_{k+1}\} \subset L(S)$. Queremos mostrar que T é L.D

Como $T \subset L(S)$, então $v_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j$, $i = 1, \dots, k+1$.

Caso 1: Se $a_{i1} = 0$, $\forall i = 1, \dots, k+1$, então $v_i = \sum_{j=2}^{k} a_{ij} x_j$. Logo $T \subset L(\{x_2, \dots, x_k\})$.

Como $\{x_2, \dots, x_k\}$ tem $k-1$ elementos e T tem $k+1$ elementos, então T é L.D. pela hipótese de indução.

Caso 2: Se $\exists\, a_{i1} \neq 0$, vamos supor para $i=1$. Logo $a_{11} \neq 0$. Seja $c_i = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$. Logo

$$c_i v_1 = a_{i1} x_1 + \sum_{j=2}^{k} c_i a_{1j} x_j$$

$$v_i = a_{i1} x_1 + \sum_{j=2}^{k} a_{ij} x_j$$

$$c_i v_1 - v_i = \sum_{j=2}^{k} (c_i a_{1j} - a_{ij}) x_j, \quad i = 1, \dots, k.$$

Logo $\underbrace{\{c_2 v_1 - v_2, c_3 v_1 - v_3, \dots, c_{k+1} v_1 - v_{k+1}\}}_{k \text{ elementos}} \in L(\underbrace{\{x_2, \dots, x_k\}}_{k-1 \text{ elementos}})$

Pela hipótese de indução, $\{c_2 v_1 - v_2, \dots, c_{k+1} v_1 - v_{k+1}\}$ é L.D. Assim,

$\exists (\lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}) \neq (0, \dots, 0)$ tal que $\sum_{i=2}^{k+1} \lambda_i (c_i v_1 - v_i) = 0$. Isto implica que

$$\left(\sum_{i=2}^{k+1} \lambda_i c_i\right) v_1 - \sum_{i=2}^{k+1} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\} \text{ é L.D.} \quad \blacksquare$$

Um exemplo interessante de espaço vetorial:

$V :=]0, \infty[$. $\quad u \oplus v = uv$

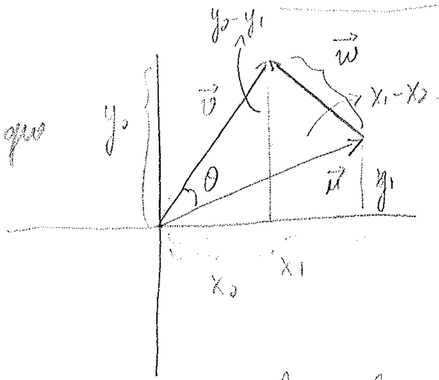
$a \odot u = u^a$

Logo $-u = \frac{1}{u}$, $0 = 1$.

$$\begin{cases} u \oplus v = v \oplus u \\ u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w \\ u \oplus 0 = u, \quad \text{i.e. } 0 = 1 \\ u \oplus (-u) = 0, \quad \text{i.e. } -u = \frac{1}{u} \\ a \odot (b \odot u) = a \odot u^b = (u^b)^a = u^{ab} = (ab) \odot u \\ a \odot (u \oplus v) = a \odot (uv) = (uv)^a = u^a v^a = (a \odot u) \oplus (a \odot v) \\ (a+b) \odot u = u^{a+b} = u^a u^b = (a \odot u) \oplus (b \odot u) \\ 1 \odot u = u^1 = u \end{cases}$$

Produto Interno e Norma

Sabemos que



$\vec{u} = (x_1, y_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

$\vec{v} = (x_2, y_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} := \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$.

Como calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}$ em termos das coordenadas? Usamos lei dos cossenos.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}, \quad \|\vec{w}\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Logo a lei dos cossenos nos diz $\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\underbrace{\cos\theta\,\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}_{\vec{u}\cdot\vec{v}}$

Assim, $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2}$$

Definição: Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

P1) $\langle u,u\rangle > 0$, se $u \neq 0$.

P2) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $u,v\in V$

P3) $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$, $\forall u,v,w\in V$

P4) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$, $\forall u,v\in V$

Observação: Se V é um espaço vetorial complexo, a mesma definição é válida, porém $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$,

P1) vira P1') $\langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$, $\langle u,u\rangle \geq 0$ e $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

P4) vira P4') $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$.

x^2+y^2-2y

Exemplo 1. $V = \mathbb{R}^n$. Logo

$$\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

Exemplo 2 $V = \mathbb{R}^2$. Logo

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$$

Exemplo 3: $V = C([0,1])$, logo
$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

Exemplo 4: $V = \mathcal{P}$. Logo
$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty e^{-t} p(t) q(t)\,dt.$$

Verificar: Ponto importante.

Exemplo 2: $\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle = x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1-x_2)^2 + 3x_2^2 \geq 0$
E é igual a 0 se $x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

Exemplo 3: $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)^2\,dt \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$.

Exemplo 4. $\int_0^\infty e^{-t} t^m\,dt$ existe, já que $e^{-t}t^m = e^{-t/2}(e^{-t/2}t^m) \leq Ce^{-t/2}$. ok.

Propriedades: 1) $\langle 0, u \rangle = 0$.

Demo: $\langle 0, u\rangle = \langle 0+0, u\rangle = \cancel{\langle 0, u\rangle} + \langle 0, u \rangle \Rightarrow \langle 0, u \rangle = 0$.

2) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w \rangle$.

Demo: $\langle u, v+w\rangle = \langle v+w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.

3) $\langle u, \alpha v\rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

Demo. $\langle u, \alpha v\rangle = \langle \alpha v, u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle = \alpha \langle u, v\rangle$.

4) $\langle u, 0 \rangle = 0$

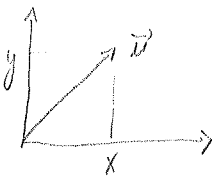
Demo: $\langle u, 0\rangle = \langle 0, u \rangle = 0$.

Obs: • Usando indução, as propriedades acima implicam que
$$\left\langle \sum_{j=1}^N a_j u_j, \sum_{k=1}^M b_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M a_j b_j \langle u_j, v_j \rangle$$

• Se V for um espaço vetorial complexo, então temos
$$\left\langle \sum_{j=1}^N a_j u_j, \sum_{k=1}^M b_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M a_j \overline{b_k} \langle u_j, v_k \rangle.$$

E tamanho?

Sabemos que se $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, então
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$



Vemos que $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$, $\|\vec{u}\| \geq 0$, $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\,\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

O último, pois

.

Definição: Uma norma $\|\cdot\| : V \to [0,\infty[$ é uma função tal que

N1) Se $u \neq 0$, então $\|u\| \neq 0$.

N2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u \in V$

N3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in V$

Propriedade: 1) $\|0\| = 0$

Demo: $\|0\| = \|0.0\| = |0|\,\|0\| = 0.\|0\| = 0$. ∎

2) $\|u\| \geq 0$.

Demo: $0 = \|0\| = \|u + -u\| \leq \|u\| + \|-u\| = \|u\| + |(-1)|\,\|u\| = 2\|u\|. \Rightarrow \|u\| \geq 0$. ∎

3) $\|u\| = \|-u\|$

Demo: $\|-u\| = \|(-1)u\| = |(-1)|\,\|u\| = \|u\|$. ∎

Exemplos: 1) $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|.$$

2) $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

3) $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$$

4) $\|\cdot\| : C([0,1]) \to [0,\infty[$

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

5) $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$$

6) $\|\cdot\|_{L^p} : C([0,1]) \to [0,\infty[$

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Verificar algumas propriedades de 1), 2), 3) e 4)...

<u>Parte difícil</u>: Provar que $\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$. Segue de Cauchy-Schwarz.

<u>Definição</u>: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. A <u>norma</u> $\|\cdot\| : V \to [0, \infty[$ <u>associada a este produto interno</u> é definida como

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

<u>Exemplos</u>: 1) $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. Logo

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \|(x_1, \dots, x_n)\|_2$$

2) $\langle \cdot , \cdot \rangle : C([0,1]) \times C([0,1]) \to \mathbb{R}$ dado por $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$. Logo.

$$\|f\| = \sqrt{\int f(t)^2\, dt} = \|f\|_{L^2}.$$

Observamos que se $\|\cdot\|$ é uma norma associada a um produto interno, então

N1) $u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0 \Rightarrow \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} > 0.$

N2) $\|\alpha u\| = \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle u, u \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle u, u \rangle} = |\alpha| \|u\|$

Como provar N3? Segue de Cauchy-Schwarz

<u>Desigualdade de Cauchy-Schwarz</u>: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, e $\|\cdot\| : V \to [0, \infty[$ a norma associada a este produto interno. Logo

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \ \forall u, v \in V.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $v = \lambda u$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Dem</u>: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(t) = \langle u + tv, u + tv \rangle$. Logo

$$f(t) = \langle u, u \rangle + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \|v\|^2 \geq 0$$

Como f é um polinômio em t e $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, então sabemos que

$$a t^2 + bt + c \geq 0, \forall t \Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \quad \text{(pela fórmula de Bhaskara)}$$

$$\Longrightarrow 4|\langle u, v \rangle|^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0 \Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Observemos que $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\|v\| \Leftrightarrow f$ tem uma raiz.

$\Leftrightarrow \exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\langle u+t_0 v, u+t_0 v\rangle = 0$

$\Leftrightarrow u = -t_0 v$. $\boxtimes$

<u>Corolário</u>: Se $\|\cdot\|: V \to [0,\infty[$ é uma norma associada a um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V \to \mathbb{R}$, então $\|\cdot\|$ é, de fato, uma norma.

<u>Demo</u>: Já verificamos N1) e N2). Basta verificar N3). Isso é simples, já que

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle = \|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle$$

$$\le \|u\|^2+\|v\|^2+2|\langle u,v\rangle| \le \|u\|^2+\|v\|^2+2\|u\|\|v\| = (\|u\|+\|v\|)^2$$

$$\Longrightarrow \|u+v\| \le \|u\|+\|v\| \qquad \boxtimes$$

<u>Algumas consequências de Cauchy-Schwarz</u>:

1) Em $\mathbb{R}^n$, definimos $\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1y_1+\dots+x_ny_n$. Logo

$$\text{C.S.} \Rightarrow |x_1y_1+\dots+x_ny_n| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}$$

2) Em $C([0,1])$, definimos $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Logo

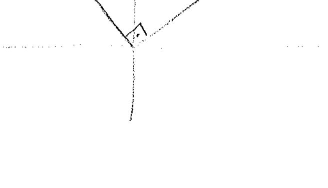
$$\text{C.S.} \Rightarrow \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \le \int_0^1 f(t)^2\,dt \int_0^1 g(t)^2\,dt$$

Ortogonalidade

Vamos usar a seguinte notação: $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

<u>Definição</u>: Dizemos que $u,v \in (V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ são ortogonais se $\langle u,v\rangle = 0$. Um conjunto $S\subset V$ é ortogonal se $\langle u,v\rangle = 0$ para todo $u,v\in S$, $u\neq v$. Um conjunto $S\subset V$ é ortonormal se for ortogonal e se $\|u\|=1$, $\forall\, u\in S$.

<u>Ideia</u>



$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Propriedades:

1) Se $S \subset V$ é um conjunto ortogonal, $0 \notin S$, então S é L.I.

Demo: Se $S = \emptyset$, então S é L.I. (por definição)

Se $S \neq \emptyset$, então $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \langle u_j, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \rangle = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 \overset{=0}{\langle u_j, u_1 \rangle} + \dots + \alpha_j \langle u_j, u_j \rangle + \dots + \alpha_n \overset{=0}{\langle u_j, u_n \rangle} = 0 \Rightarrow \alpha_j \|u_j\|^2 = 0$ $\blacksquare$

$\Rightarrow \alpha_j = 0, \forall j$

2) Se $S \subset V$ é um conjunto ortogonal, $0 \notin S$, com n elementos e $\dim V = n$, então S é base de V

Demo: S tem n elementos e é L.I. Logo S é base, pois $\dim V = n$ $\blacksquare$

Definição: Dizemos que S é uma base ortogonal (base ortonormal) de V se S for uma base de V e um conjunto ortogonal (ortonormal). Analogamente definimos base ortogonal ordenada (base ortonormal ordenada).

Proposição: Seja $B = (e_1, \dots, e_n)$ uma base ortogonal ordenada de V. Logo

1) Se $u \in V$, então as componentes de u em relação a esta base são $\left(\frac{\langle u, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2}, \dots, \frac{\langle u, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} \right)$.

2) Se $u \in V$ e B é base ortonormal ordenada, então as coordenadas são $(\langle u, e_1 \rangle, \dots, \langle u, e_n \rangle)$

Demo: Sabemos que

$$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

$$\text{Logo } \langle u, e_\ell \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_\ell \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle e_j, e_\ell \rangle = \alpha_\ell \langle e_\ell, e_\ell \rangle \Rightarrow \alpha_\ell = \frac{\langle u, e_\ell \rangle}{\langle e_\ell, e_\ell \rangle}$$

Assim $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left(\frac{\langle u, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2}, \dots, \frac{\langle u, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} \right)$

Se B é ortonormal, então $\|e_j\|^2 = 1$ e $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\langle u, e_1 \rangle, \dots, \langle u, e_n \rangle)$. $\blacksquare$

Proposição (Fórmula de Parseval). Seja $B=(e_1,\dots,e_n)$ uma base ortonormal. Logo

$$\langle u,v\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle u,e_j\rangle \langle e_j,v\rangle .$$

Demo:
$$\langle u,v\rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n}\langle u,e_j\rangle e_j, \sum_{k=1}^{n}\langle v,e_k\rangle e_k\Big\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle u,e_j\rangle \langle v,e_k\rangle \langle e_j,e_k\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\langle u,e_j\rangle \Big(\sum_{k=1}^{n}\langle v,e_k\rangle \underbrace{\langle e_k,e_j\rangle}_{=\delta_{jk}=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\langle u,e_j\rangle\langle v,e_j\rangle \quad \boxed{E}$$

Corolário: $\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle u,e_j\rangle|^2$.

Demo: Basta tomar $v=u$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Teorema: Todo espaço de dimensão finita com produto interno possui uma base ortonormal.

Demo: Seja $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ uma base de V. Definimos

$$f_1 = u_1$$
$$f_2 = u_2 - \frac{\langle u_2,f_1\rangle}{\|f_1\|^2} f_1$$
$$f_3 = u_3 - \frac{\langle u_3,f_2\rangle}{\|f_2\|^2} f_2 - \frac{\langle u_3,f_1\rangle}{\|f_1\|^2} f_1$$
$$\vdots$$
$$f_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u_k,f_j\rangle}{\|f_j\|^2} f_j$$

Note que se $f_2=0$, então $u_2 = \frac{\langle u_2,f_1\rangle}{\|f_1\|^2} u_1$ ABS, pois $\{u_1,u_2\}$ é L.I.

se $f_k=0$, então $u_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u_k,f_j\rangle}{\|f_j\|^2} f_j \in L(\{u_1,\dots,u_{k-1}\})$. Logo $\{u_1,\dots,u_k\}$ é L.D. ABSURDO

Assim $\{f_1,\dots,f_n\}$ é um conjunto de vetores distintos. Além disso, são ortogonais.

Vamos provar que são ortogonais

$$\langle f_2, f_1 \rangle = \left\langle u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1, u_1 \right\rangle = \langle u_2, u_1 \rangle - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \|u_1\|^2 = 0.$$

Se $\{f_1, \dots, f_k\}$ são ortogonais, então $\{f_1, \dots, f_{k+1}\}$ são ortogonais. De fato,

$$\langle f_{k+1}, f_\ell \rangle \underset{\ell \le k}{=} \left\langle u_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle u_{k+1}, f_j \rangle}{\|f_j\|^2} f_j, f_\ell \right\rangle = \langle u_{k+1}, f_\ell \rangle - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle u_{k+1}, f_j \rangle}{\|f_j\|^2} \underbrace{\langle f_j, f_\ell \rangle}_{\substack{0,\ j \neq \ell \\ \|f_j\|^2,\ j = \ell}}$$

$$= \langle u_{k+1}, f_\ell \rangle - \langle u_{k+1}, f_\ell \rangle = 0.$$

Logo, por indução finita, o conjunto é ortogonal.

Definimos $e_j := \dfrac{f_j}{\|f_j\|}$. Logo $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ é um conjunto ortonormal de n elementos

[2]

Portanto é uma base.

__Exemplo 1__ $\{(1,-1,1,-1), (5,1,1,1), (-3,-3,1,-3)\}$

$$f_1 = (1,-1,1,-1)$$

$$f_2 = (5,1,1,1) - \frac{\langle (5,1,1,1), (1,-1,1,-1) \rangle}{\|(1,-1,1,-1)\|^2} (1,-1,1,-1) =$$

$$= (5,1,1,1) - \frac{(4,-4,4,-4)}{4} = (5,1,1,1) - (1,-1,1,-1) = (4,2,0,2)$$

$$f_3 = (-3,-3,1,-3) - \frac{\langle (-3,-3,1,-3), (1,-1,1,-1) \rangle}{\|(1,-1,1,-1)\|^2} (1,-1,1,-1) - \frac{\langle (-3,-3,1,-3), (4,2,0,2) \rangle}{\|(4,2,0,2)\|^2} (4,2,0,2)$$

$$= (-3,-3,1,-3) - (1,-1,1,-1) + (4,2,0,2) = (0,0,0,0) \qquad \boxed{\{f_1, f_2\} \text{ é base}}$$

__Exemplo 2__ Polinômios de Legendre $\langle p, q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t) q(t)\, dt$, $\beta = \{1, t, t^2, \dots\}$

$$g_1(t) = 1$$

$$g_2(t) = t - \frac{\langle t, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 = t$$

$$g_3(t) = t^2 - \frac{\langle t^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 - \frac{\langle t^2, t \rangle}{\|t\|^2} t = t^2 - \frac{2\int_0^1 t^2\, dt}{2} 1 = t^2 - \frac{1}{3} 1.$$

<u>Definição</u>: Seja $S \subset V$. Definimos o conjunto $S^\perp$, chamado de S perpendicular, por

$$S^\perp = \{x \in V,\ \langle x, u\rangle = 0,\ \forall u \in S\}$$

Se S é um subespaço de V, então $S^\perp$ é chamado de espaço complementar ortogonal.

<u>Exemplo 1</u>: $S = \{0\}$. Logo $S^\perp = \{0\}^\perp = V$

<u>Exemplo 2</u>: $S = V$. Logo $S^\perp = \{0\}$.

<u>Exemplo 3</u>: $S = \{\vec{i}, \vec{j}\}$. Logo $S^\perp = L(\{\vec{k}\})$.

<u>Proposição</u>: Se $S \subset V$, então $S^\perp$ é um subespaço de V.

<u>Demo</u>: $0 \in S^\perp$, pois $\langle 0, u\rangle = 0$, $\forall u \in S$

$\langle \alpha u + v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$. Logo se $u, v \in S^\perp$, $w \in S$, então $\alpha u + v \in S^\perp$. $\boxed{}$

<u>Teorema</u>: Seja $S \subset V$ um subespaço de dimensão finita. Logo para todo $v \in V$, $\exists!\ s \in S$ e $s^\perp \in S^\perp$ tais que $v = s + s^\perp$. Além disso $\|v\|^2 = \|s\|^2 + \|s^\perp\|^2$.

<u>Demo</u>: <u>Existência</u> Seja $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ uma base ortonormal de S. Logo se $u \in V$, então

$$u = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \langle u, u_k\rangle u_k}_{:= s \in S} + \underbrace{\left(u - \sum_{j=1}^{k} \langle u, u_k\rangle u_k\right)}_{:= s^\perp \in S^\perp}$$

De fato $\langle u_j, u - \sum_{j=1}^{k} \langle u, u_k\rangle u_k\rangle = \langle u_j, u\rangle - \langle u, u_j\rangle = 0$. Logo $u - \sum_{j=1}^{k} \langle u, u_k\rangle u_k \in S^\perp$.

(Vimos: Se B é base de S e $\langle u, u_j\rangle = 0$, $\forall u_j \in B$, então $u \in S^\perp$)

<u>Unicidade</u>: Se $v = s + s^\perp = t + t^\perp$, $t, s \in S$ e $t^\perp, s^\perp \in S^\perp$, então

$$s - t = s^\perp - t^\perp$$

$$\Rightarrow \langle s - t, s - t\rangle = \langle \underbrace{s - t}_{\in S}, \underbrace{s^\perp - t^\perp}_{\in S^\perp}\rangle = 0 \Rightarrow s = t \Rightarrow s^\perp = t^\perp$$

Relação entre as normas

$$\|u\|^2 = \|s+s'\|^2 = \langle s+s', s+s'\rangle = \|s\|^2+\|s'\|^2 + 2\langle s,s'\rangle = \|s\|^2+\|s'\|^2 \quad \boxtimes$$

Definição: Nas condições do Teorema acima, chamamos de projeção de u no subespaço S o elemento

$$\sum_{j=1}^{k} \langle u_j, u\rangle u_j$$

Pela unicidade, o elemento acima independe da base B escolhida.

Teorema. Seja $S\subset V$ um subespaço de dimensão finita, $u\in V$ e $s\in S$ sua projeção em S. Logo

$$\|u-s\| \le \|u-t\|, \ \forall t\in S.$$

Logo $\|u-s\| = \min_{t\in S} \|u-t\|$.

Dem: Basta observar que se $t\in S$, então

$$\|u-t\|^2 = \|u-s+s-t\|^2 = \langle u-s+s-t, u-s+s-t\rangle$$
$$= \|u-s\|^2+\|s-t\|^2 + 2\langle \underbrace{u-s}_{\in S^\perp}, \underbrace{s-t}_{\in S}\rangle = \|u-s\|^2+\|s-t\|^2 \ge \|u-s\|^2 \quad \boxtimes$$

Exemplo 1 $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_{2k-1}(x) = \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}$, $\varphi_{2k}(x) = \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$ em $[0,2\pi]$.

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

Exemplo 2 $f(x) = \sin(\pi x) \approx \frac{3}{\pi}x$, quando usamos $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\,t, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2-1)$.