PROVA 1 - MATEMÁTICA 4 (CCM0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA42019

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Em cada um dos itens abaixo, considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e o vetor $v \in \mathbb{R}^n$ e calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$.

(1,25 ponto) a) $f(x) = \langle Tx, x\rangle^3$, em que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear auto-adjunta (ou seja, $\langle Ty, z\rangle = \langle y, Tz\rangle$ para todo $y, z \in \mathbb{R}^n$. Isto equivale a dizer que a matriz que representa T na base canônica de $\mathbb{R}^n$ satisfaz $t_{ij} = t_{ji}$ para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$).

(1,25 ponto) b) $f(x) = \int_0^{\|x\|^2} e^{-t^2} dt$, em que $\|x\|$ denota a norma euclidiana de x.

Exercício 2

Considere as funções $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $f(x, y, z) = \left(x^2 + y + z, \cos(y) + z^3\right)$ e $g(x, y) = (x\cos(y), x\mathrm{sen}(y))$.

(1,25 ponto) a) Calcule as matrizes Jacobianas Jf e Jg no ponto (x, y, z) e (x, y), respectivamente.

(1,25 ponto) b) Calcule a matriz Jacobiana da composição $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, denotada por $J(g \circ f)$, no ponto $(1, 0, 1)$.

Exercício 3

Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = e^{(x+y)} + \mathrm{sen}(y + z)$. Observando que $f(0, 0, 0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) \neq 0$, concluímos, pelo teorema da função implícita, que existe uma função $g : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que contém 0 tal que $e^{(x+y)} + \mathrm{sen}(y + g(x, y)) = 1$ e $g(0) = 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$, ou seja, $z = g(x, y)$.

(1,25 ponto) a) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ como função de x, y e z.

(1,25 ponto) b) Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y)$ como função de x, y e z.

Exercício 4

(1,25 ponto) a) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ e o ponto $p = (1, 1)$. O ponto p é um ponto crítico de f? Se for, determine se ele é um ponto de máximo local, mínimo local ou nenhum dos dois.

(1,25 ponto) b) Considere a superfície S em $\mathbb{R}^3$ definida pela equação $z^2 - 10xy = 1$. Ache os pontos de S cuja distância à origem de $\mathbb{R}^3$ seja a menor possível. Calcule essa distância.

Formulário.

Definição 1. Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ uma função definida num aberto Ω. Dizemos que f é diferenciável se para todo $x\in\mathbb{R}^n$, existe uma transformação linear $f'(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e uma função $r_x:\{v\in\mathbb{R}^n;\, x+v\in\Omega\}\to\mathbb{R}^m$ tal que

$$f(x+v)=f(x)+f'(x)(v)+r_x(v),$$

em que $\lim_{v\to 0}\frac{r_x(v)}{\|v\|}=0$.

Definição 2. Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ uma função definida num aberto Ω e $v\in\mathbb{R}^n$. Definimos $\frac{\partial f}{\partial v}(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$. Se f for diferenciável, então $\frac{\partial f}{\partial v}(x)=f'(x)(v)$. Se $m=1$, então $f'(x)(v)=\langle\nabla f(x),v\rangle$.

Definição 3. Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ um função definida no aberto Ω de classe C^1. Seja $a\in\mathbb{R}$ um ponto que pertence a imagem de f e é tal que se $f(x)=a$, então $\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)\neq 0$. Logo $S=f^{-1}(a):=\{x\in\Omega;\, f(x)=a\}$ é chamado de superfície de nível. O espaço tangente a um ponto $x\in\Omega$ é definido como o conjunto dos vetores da forma $\alpha'(0)$, em que $\alpha:]-\delta,\delta[\to\mathbb{R}^n$ é uma função de classe C^1 tal que $\alpha(0)=x$ e a imagem de α está contida em S. Em particular, $\frac{d}{dt}f\circ\alpha(t)=0$. Assim, $\langle\nabla f(x),\alpha'(0)\rangle=0$.

Definição 4. Sejam $f:U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ e $g:V\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ funções diferenciáveis tais que $f(U)\subset V$. Logo $g\circ f:U\to\mathbb{R}^p$ é diferenciável e

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\,f'(x).$$

Em particular,

$$\frac{\partial(g\circ f)_i}{\partial x_j}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x).$$

A matriz Jacobiana $Jf(x)$ é a matriz que representa a transformação linear $f'(x)$. Ela é uma matriz $n\times m$ dada por $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j}$. Em particular, $J(g\circ f)$ é composição de $J(g)(f(x))$ e $J(f)(x)$.

Definição 5. Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, em que Ω é um aberto.

1) Dizemos que $a\in\Omega$ é um mínimo local de f se existe um aberto $U\subset\Omega$ que contém a tal que $f(x)\geq f(a)$, para todo $x\in U$.

2) Dizemos que $a\in\Omega$ é um máximo local de f se existe um aberto $U\subset\Omega$ que contém a tal que $f(x)\leq f(a)$, para todo $x\in U$.

Seja $g:\Omega\to\mathbb{R}$ uma função C^1 e $c\in\mathbb{R}$ um ponto da imagem de g tal que $S=g^{-1}(c)$ é uma superfície de nível.

3) Dizemos que $a\in\Omega$ é um mínimo local de f em S se existe um aberto $U\subset\Omega$ que contém a tal que $f(x)\geq f(a)$, para todo $x\in U\cap S$.

4) Dizemos que $a\in\Omega$ é um máximo local de f em S se existe um aberto $U\subset\Omega$ que contém a tal que $f(x)\leq f(a)$, para todo $x\in U\cap S$.

Proposição 1. *Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, em que Ω é um aberto, uma função de classe C^1. Se $a\in\Omega$ é um ponto de máximo ou mínimo local de f, então $\nabla f(a)=0$, ou seja, a é um ponto crítico de f.*

Por outro lado, se $a\in\Omega$ é tal que $\nabla f(a)=0$, então consideramos a matriz Hessiana $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida como $Hf(a)_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$.

1) Se $Hf(a)$ tem todos autovalores >0, a é ponto de mínimo local.

2) Se $Hf(a)$ tem todos autovalores <0, a é ponto de máximo local.

3) Se $Hf(a)$ tem autovalores <0 e >0, então a não é ponto de máximo nem de mínimo.

Proposição 2. *Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, em que Ω é um aberto, uma função de classe C^1. Consideremos também $g:\Omega\to\mathbb{R}$ uma função C^1 e $c\in\mathbb{R}$ um ponto da imagem de g tal que $S=g^{-1}(c)$ é uma superfície de nível. Se $a\in\Omega$ é um ponto de máximo ou mínimo de f em S, então*

1. $g(a)=c$.

2. Existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\nabla f(a)=\lambda\nabla g(a)$.