PROVA 2 - MATEMÁTICA 4 (CCM 0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/∼PPLOPES/MATEMATICA42019

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

(1 Ponto) a) Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ o fio dado pela curva $\gamma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t)$ com densidade $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Qual é a massa desse fio?

(1 Ponto) b) Calcule $\int_C xydx + \left(x^2 + z\right) dy + \left(y^2 - x\right) dz$, em que C é a curva obtida pela intersecção do cone $x^2 + y^2 = z^2$ com o cilindro $x = y^2$ de $(0, 0, 0)$ até $(1, 1, \sqrt{2})$.

(1 Ponto) c) Calcule $\int_C \left(2xy^3 - y^2 \cos(x)\right) dx + \left(1 - 2y\text{sen}(x) + 3x^2y^2\right) dy$, em que C é o arco da parábola ($y = ax^2$, para algum $a \in \mathbb{R}$) de $(0, 0)$ até $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Exercício 2

(1,5 Ponto) a) Seja $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0) ; y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y, z) = \left(\frac{-z}{x^2+z^2}, y, \frac{x}{x^2+z^2}\right)$. Esta função tem rotacional nulo? Ela é conservativa em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0) ; y \in \mathbb{R}\}$?

(1 Ponto) b) Quanto vale $\int_C f.d\alpha$ quando α percorre o círculo $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, no sentido anti-horário no plano xz? Justifique.

Exercício 3

(1,5 ponto) a) Seja C uma curva de Jordan de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e R o seu interior. Mostre que, se $f, g : \overline{R} \to \mathbb{R}$ forem funções de classe C^2, então

$$\oint_C \left(-f\frac{\partial g}{\partial y}dx + f\frac{\partial g}{\partial x}dy\right) = \int\int_R (f\Delta g + \nabla f.\nabla g)\, dxdy,$$

em que $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ e $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$.

Use o resultado acima para mostrar que, se $u : \overline{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e é tal que:
i) $\Delta u(x, y) = 0$, para todo (x, y) em R,
ii) $u(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in C = \partial R$,
então $u(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \overline{R}$.

(1 ponto) b) Seja C uma curva de Jordan de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e R o seu interior. Mostre que

$$\text{Área}(R) = \oint_C xdy = -\oint_C ydx.$$

Use uma das integrais de linha acima para calcular a área de $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1\right\}$.

Exercício 4

(2 pontos) Ache a integral $\int\int_D \frac{(x+y)^7}{(y-x)} dxdy$, em que D é o paralelogramo delimitado pelas retas $x + y = 3$, $x + y = 4$, $y - x = 1$ e $y - x = 3$.

Formulário.

Definição 1. Seja $f = (f_1, ..., f_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Definimos a integral de linha por

$$\int f.d\alpha = \int f_1 dx_1 + ... + f_n dx_n = \int_a^b f(\alpha(t)).\alpha'(t)\, dt.$$

Seja $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos a integral pelo comprimento da curva por

$$\int g ds = \int_a^b g(\alpha(t)) \left\|\alpha'(t)\right\| dt.$$

Exemplo 2. A integral de linha pode ser usada para cálculo de trabalho. Integral pelo comprimento da curva pode ser usado para o cálculo de comprimento, massa, centro de massa e etc. Se $\rho : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ descreve a densidade, então a massa de um objeto descrito pela curva $\alpha : [a, b] \to \Omega$ é dada por $\int \rho ds$. O centro de massa é o vetor $(y_1, ..., y_n)$ dado por $y_j = \frac{\int \rho x_j ds}{\int \rho ds}$.

Definição 3. Dizemos que uma função $f = (f_1, ..., f_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo conservativo se existe $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f = \nabla\varphi$.

Proposição 1. *Se $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma função conservativa de classe C^1, então seu rotacional é zero. (Dizemos que f tem rotacional zero se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$). Se Ω é convexo, e f é de classe C^1 e tem rotacional igual a zero, então f é conservativa.*

Definição 4. Seja $\alpha : [a, b] \to \Omega$ uma curva de Jordan (fechada e simples) de classe C^1 por partes e cujo interior, denotado por R, pertence ao aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1. Logo

$$\oint_{Im(\alpha)} P dx + Q dy = \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy,$$

em que $\oint$ indica que a integral de linha é feita no sentido anti-horário.

Observação 5. Para simplificar a notação, diremos que uma função $f : \overline{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^k, se existir um aberto Ω que contém $\overline{R}$ tal que f pode ser estendida a uma função de classe C^k em Ω.

Definição 6. Seja $Q \subset \mathbb{R}^n$ e $\varphi : Q \to \tilde{Q}$ um difeomorfismo. Seja $f : Q \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Logo

$$\int_Q f dx = \int_{\varphi^{-1}(Q)} f \circ \varphi \left|\det d\varphi\right| dx,$$

em que $\det(d\varphi) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)$.