PROVA 2 - MATEMÁTICA 4 (CCM 0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/$\sim$PPLOPES/MATEMATICA4

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

(1,5 Ponto) Calcule a área da superfície dada por $z^2 = x^2 + y^2$, em que $0 \leq z \leq \frac{3-y}{2}$.

Resolução:

Primeiro achamos uma parametrização adequada da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ para $z \geq 0$. Usaremos a parametrização $\varphi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Logo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \times \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right).$$

Assim, $\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right\| = \sqrt{2}$.

Seja $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2 = x^2 + y^2 \text{ e } 0 \leq z \leq \frac{3-y}{2}\right\}$. Logo, pela fórmula de integral de superfície, temos

$$\acute{a}rea(S) = \int\int_S dS = \int\int_\Omega \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right\| dxdy = \int\int_\Omega \sqrt{2}dxdy,$$

em que $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{3-y}{2}\right\}$. Note que

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{3-y}{2} \iff x^2 + y^2 \leq \left(\frac{3-y}{2}\right)^2 \iff$$
$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\left(9 - 6y + y^2\right) \iff x^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y \leq \frac{9}{4} \iff$$
$$x^2 + \frac{3}{4}(y+1)^2 \leq 3.$$

Seja $x = \sqrt{3}rcos(\theta)$ e $y = -1 + 2rsen(\theta)$. Logo

$$x^2 + \frac{3}{4}(y+1)^2 \leq 3 \iff r \leq 1 \text{ e } \theta \in [0, 2\pi].$$

Além disso, vemos que

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sqrt{3}cos(\theta) & -\sqrt{3}rsen(\theta) \\ 2sen(\theta) & 2rcos(\theta) \end{pmatrix} = 2\sqrt{3}r.$$

Concluímos, pelo teorema de mudança de variáveis de integrais em $\mathbb{R}^2$, que

$$\int\int_\Omega \sqrt{2}dxdy = 2\sqrt{2}\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta = 2\sqrt{6}\pi.$$

Exercício 2

Seja S_1 o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, e n_1 a normal unitária que aponta para fora da esfera. Seja S_2 a região $\left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ e $n_2 = (0, 0, -1)$.

(1 Ponto) a) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função dada por $f(x, y, z) = (2x, -4y, 2z + 1)$. Calcule o fluxo de f em S_1 na direção n_1 e o fluxo de f em S_2 na direção n_2.

Resolução:

Fluxo em S_2.

Uma paramerização adequada é dada por $\varphi : B(0, 1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\right\} \to \mathbb{R}^3$ definida como $\varphi(x, y) = (x, y, 0)$. Assim, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = (1, 0, 0)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = (0, 1, 0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = (0, 0, 1)$.

Conluímos que

$$\int\int_{S_2} \langle f, n_2\rangle\, dS = \int\int_{B(0,1)} \left\langle f \circ \varphi(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right\rangle dxdy$$

$$= \int\int_{B_1(0)} (2x, -4y, 1) . (0,0,-1)\, dxdy = -\int\int_{B_1(0)} dxdy = -\pi.$$

Assim, o fluxo de f em S_2 na direção n_2 é $-\pi$.

Fluxo em S_1.

Observemos pelo teorema da divergência que, para $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\right\}$, temos

$$\int\int_{S_1} \langle f, n_1 \rangle\, dS + \int\int_{S_2} \langle f, n_2 \rangle\, dS = \int\int\int_R \nabla . f\,(x,y,z)\, dxdydz = 0.$$

Logo o fluxo em S_1 na direção n_1 é π.

Outra forma de calcular o Fluxo em S_1. (Cálculo na marra).

Em S_1 podemos fazer a conta sem usar o teorema da divergência. Seja

$$\varphi(\theta,\phi) = (cos\,(\theta)\, sen\,(\phi)\,, sen\,(\theta)\, sen\,(\phi)\,, cos\,(\phi))\,.$$

Logo podemos calcular $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$ por

$$\begin{array}{ccccc} i & j & k & i & j \\ -sen\,(\theta)\, sen\,(\phi) & cos\,(\theta)\, sen\,(\phi) & 0 & -sen\,(\theta)\, sen\,(\phi) & cos\,(\theta)\, sen\,(\phi) \\ cos\,(\theta)\, cos\,(\phi) & sen\,(\theta)\, cos\,(\phi) & -sen\,(\phi) & cos\,(\theta)\, cos\,(\phi) & sen\,(\theta)\, cos\,(\phi) \end{array}$$

$$= \left(-cos\,(\theta)\, sen^2\,(\phi)\,, -sen\,(\theta)\, sen^2\,(\phi)\,, -sen\,(\phi)\, cos\,(\phi)\right).$$

Assim, observando que queremos calcular com a normal apontando para cima, temos

$$\int\int_{S_1} \langle f, n_1 \rangle\, dS = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2cos^2\,(\theta)\, sen^3\,(\phi) - 4sen^2\,(\theta)\, sen^3\,(\phi) + 2sen\,(\phi)\, cos^2\,(\phi) + sen\,(\phi)\, cos(\phi)\right) d\phi \right) d\theta = ... = \pi.$$

(0,5 Ponto) b) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função dada por $f(x,y,z) = \left(2x + \text{sen}\left(y^2\right), -4y + \cos\left(x^2+z^6\right), 2z + e^{15x}\right)$. Calcule o fluxo de f em $S = S_1 \cup S_2$ na direção n em que n é igual a n_1 sobre S_1 e é igual a n_2 sobre S_2.

Resolução:

Pelo Teorema da Divergência, temos

$$\int\int_S \langle f, n \rangle\, dS = \int\int\int_R \nabla . f\,(x,y,z)\, dxdydz = 0.$$

EXERCÍCIO 3

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma região conexa e limitada com bordo $\partial\Omega$ de classe C^1. Considere o seguinte problema: Ache uma função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\begin{array}{c} \Delta u\,(x) = f\,(x)\,,\ x \in \Omega \\ \partial_n u\,(x) = g\,(x)\,,\ x \in \partial\Omega \end{array},$$

em que $\partial_n u = \langle \nabla u, n \rangle$ é a derivada direcional na direção de n, a normal que aponta para fora de Ω, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Dica para o exercício: Use o teorema da divergência e prove que se $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, então

i) $\int\int\int_\Omega \Delta w\,(x)\, dx = \int\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n}\,(x)\, dS$.

ii) $\int\int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial n}\,(x)\, dS = \int\int\int_\Omega \|\nabla w\,(x)\|^2\, dx$, se $\Delta w = 0$.

(1 ponto) a) Mostre que se existe uma solução u do problema acima, então f e g devem satisfazer $\int\int\int_\Omega f\,(x)\, dx = \int\int_{\partial\Omega} g\,(x)\, dS$.

Resolução:

Observemos que se $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, então

$$\int\int\int_\Omega \Delta w\,(x)\, dx \overset{(1)}{=} \int\int\int_\Omega \nabla . (\nabla w\,(x))\, dx \overset{(2)}{=} \int\int_{\partial\Omega} \nabla w\,(x)\, .ndS \overset{(3)}{=} \int\int_{\partial\Omega} \partial_n w\,(x)\, dS.$$

Note que

(1) segue do fato de que o Laplaciano é igual ao divergente do gradiente.

(2) Segue do Teorema da Divergência.

(3) A derivada direcional de w na direção n é igual ao produto escalar do gradiente de w com o vetor n.

Assim, se $w = u$, temos

$$\int\int\int_\Omega f\,(x)\, dx = \int\int\int_\Omega \Delta u\,(x)\, dx = \int\int_{\partial\Omega} \partial_n u\,(x)\, dS = \int\int_{\partial\Omega} g\,(x)\, dS.$$

(1 ponto) b) Mostre que se v é uma outra solução do problema, então existe uma constante $C > 0$ tal que $u = v + C$.

Resolução:

Observamos que se w é de classe C^2, então

$$div\,(w\,grad\,(w)) = \nabla.\,(w\nabla w) = \nabla w.\nabla w + w\Delta w.$$

Logo, se w é uma função escalar tal que $\Delta w = 0$, então

$$\int\int\int_{\Omega} \|\nabla w\,(x)\|^2\,dx = \int\int\int_{\Omega} \nabla w.\nabla w dx = \int\int\int_{\Omega} [\nabla.\,(w\nabla w) - w\Delta w]\,dx$$
$$= \int\int\int_{\Omega} \nabla.\,(w\nabla w)\,dx = \int\int_{\partial\Omega} w\frac{\partial w}{\partial n}\,(x)\,dS.$$

Se u e v são solução do problema, então $\Delta\,(u - v) = \Delta u - \Delta v = f - f = 0$. Assim, podemos usar o resultado anterior para $w = u - v$ e obter

$$\int\int\int_{\Omega} \|\nabla\,(u - v)\,(x)\|^2\,dx = \int\int_{\partial\Omega} (u\,(x) - v\,(x))\,\frac{\partial\,(u - v)}{\partial n}\,(x)\,dS$$
$$= \int\int_{\partial\Omega} (u\,(x) - v\,(x))\left(\frac{\partial u}{\partial n}\,(x) - \frac{\partial v}{\partial n}\,(x)\right)dS = \int\int_{\partial\Omega} (u\,(x) - v\,(x))\,(g\,(x) - g\,(x))\,dS = 0.$$

Concluímos que $\int\int\int_{\Omega} \|\nabla\,(u - v)\,(x)\|^2\,dx = 0$. Como $x \mapsto \|\nabla\,(u - v)\,(x)\|^2$ é contínua, concluímos que $\nabla\,(u - v)\,(x) = 0$ para todo x. Como Ω é conexo, concluímos que $u - v$ é igual a uma função constante.

Exercício 4

(2 pontos) Seja a superfície com bordo S definida como $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $0 \le z \le \sqrt{2}$ e n a normal que aponta para fora da esfera. Calcule $\int\int_S \nabla \times f.ndS$, em que $f\,(x, y, z) = \left(zy\cos\left(\frac{\pi z^2}{2}\right), z\text{sen}\left(\frac{\pi z^2}{2}\right), yz\right)$.

Resolução:

Usaremos o teorema de Stokes:

$$\int\int_S \nabla \times f.ndS = \int_{\partial S} f.d\Gamma.$$

Observemos que nesse caso, ∂S é composto de duas curvas descritas por funções em $\theta \in [0, 2\pi]$: $\gamma_1 = (2cos\,(\theta)\,, 2sen\,(\theta)\,, 0)$ e $\gamma_2 = \left(\sqrt{2}cos\,(\theta)\,, \sqrt{2}sen\,(\theta)\,, \sqrt{2}\right)$. Logo

$$\int_{\gamma_1} f.d\Gamma = \int_{\gamma_1} \left(02cos\,(\theta)\,\cos\left(\frac{\pi 0^2}{2}\right), 0\text{sen}\left(\frac{\pi 0^2}{2}\right), 2sen\,(\theta)\,0\right).\,(-2sen\,(\theta)\,, 2cos\,(\theta)\,, 0)\,d\theta = 0$$

$$\int_{\gamma_2} f.d\Gamma = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2}\sqrt{2}sen\,(\theta)\,\,cos\,(\pi)\,, \sqrt{2}\text{sen}\,(\pi)\,, \sqrt{2}\sqrt{2}sen\,(\theta)\right).\left(-\sqrt{2}sen\,(\theta)\,, \sqrt{2}cos\,(\theta)\,, 0\right)d\theta$$
$$= -2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} sen^2\,(\theta)\,d\theta = -2\sqrt{2}\pi.$$

Usando a regra da mão direita, temos

$$\int_{\partial S} f.d\Gamma = \int_{\gamma_1} f.d\Gamma - \int_{\gamma_2} f.d\Gamma = 2\sqrt{2}\pi.$$

Exercício 5

(1 ponto) a) Considere a 1-forma diferencial $\omega\,(x, y, z) = f_1\,(x, y, z)\,dx + f_2\,(x, y, z)\,dy + f_3\,(x, y, z)\,dz$ em $\mathbb{R}^3$. Existe uma função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ tal que $d\omega\,(x, y, z) = g_1\,(x, y, z)\,dy \wedge dz + g_2\,(x, y, z)\,dz \wedge dx + g_3\,(x, y, z)\,dx \wedge dy$. Quem é essa função? Justifique calculando $d\omega$.

(1 ponto) b) Considere a 2-forma diferencial $\omega\,(x, y, z) = f_1\,(x, y, z)\,dy \wedge dz + f_2\,(x, y, z)\,dz \wedge dx + f_3\,(x, y, z)\,dx \wedge dy$ em $\mathbb{R}^3$. Existe uma função g tal que $d\omega\,(x, y, z) = g\,(x, y, z)\,dx \wedge dy \wedge dz$. Quem é essa função? Justifique calculando $d\omega$.

Resolução:

Não precisa treinar esse exercício! Formas não cairão na prova P3 de 2019.

Formulário.

Definição 1. Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização e $S = \varphi(\Omega)$. Nestas condições:

1) A área da superfície é definida como

$$\int\int_{\Omega} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| dudv.$$

2) A integral de superfície de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, em que $S \subset U$, é definida como

$$\int\int_{S} f dS = \int\int_{\Omega} f \circ \varphi(u,v) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| dudv.$$

3) O fluxo de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, em que $S \subset U$, é definido como $\int\int_S \langle f, n \rangle dS$. Portanto é calculado como

$$\int\int_{\Omega} \left\langle f \circ \varphi(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle dudv.$$

Teorema 1. *O teorema do divergente nos diz que se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado e conexo e se $\partial\Omega$ for suficientemente regular (de classe C^1, ou cubos, poliedros, semicírculos e etc) e se $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1, então*

$$\int\int\int_{\Omega} \nabla . u dx = \int\int_{\partial\Omega} \langle u, n \rangle dS,$$

em que n é a normal unitária que aponta para fora.

Teorema 2. *O teorema de Stokes nos diz que se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de dimensão 2 com bordo suficientemente regular (por exemplos, curvas de classe C^1), e se $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ é uma função de classe C^1, em que $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ e Ω é um aberto, então*

$$\int\int_{S} \nabla \times u . n dS = \int_{\partial S} u . d\alpha,$$

em que $\int_{\partial S} u . d\alpha$ é a integral de linha sobre o bordo da superfície e n é uma normal unitária da superfície. A integração de linha obdece a regra da mão direita.

Definição 2. Uma p-forma ω em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\omega : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com p-cópias de $\mathbb{R}^n$, linear em cada uma das coordenadas e alternada. Em particular, temos

$$dx_i(v_1, ..., v_n) = v_i,$$
$$dx_i \wedge dx_j \left((v_1, ..., v_n), (w_1, ..., w_n) \right) = v_i w_j - v_j w_i.$$

Logo $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ e $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Uma p-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ é uma função ω definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e que a cada ponto $x \in \Omega$ corresponde uma p-forma $\omega(x)$.

Definição 3. Dado uma p-forma $\omega(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i dx_I$, em que $dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_N}$, definimos a $p+1$-forma $d\omega$ como

$$d\omega(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_k}(x) dx_k \wedge dx_I.$$