PROVA 2 - MATEMÁTICA 4 (CCM 0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA42019

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

DICA PARA A PROVA: Nenhum exercício precisa de uma quantidade muito grande de contas!

Boa Prova!

Exercício 1

(1,5 Ponto) a) Calcule a área da superfície $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \,\mathrm{e}\, 0 < z < \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

(1,5 Ponto) b) Calcule a área da superfície $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z^2 = 2xy,\ 0 < x < 5 \,\mathrm{e}\, 0 < y < 5\right\}$.

Exercício 2

Calcule os fluxos das funções abaixo sobre as superfícies indicadas.

(1,5 Ponto) a) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função dada por $f(x,y,z) = (x+1, y+1, -2(z+1))$. Calcule o fluxo de f em

i) $S_1 = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 < 1\right\}$ com a normal $(0,0,1)$.

ii) $S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z > 0\right\}$ com a normal apontando para fora da esfera.

iii) $S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z < 0\right\}$ com a normal apontando para fora da esfera.

iv) $S_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$ com a normal apontando para fora da esfera.

(1 Ponto) b) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função dada por $f(x,y,z) = (2xy, 0, -xz)$. Calcule $\int\int_S \nabla \times f.ndS$ em $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2 = 1\right\}$ com a normal n apontando para fora do elipsóide.

Exercício 3

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo e limitado com bordo $\partial\Omega$ de classe C^1 e $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto tal que $\overline{\Omega} \subset U$. Sejam f e $g : U \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2.

(1,25 ponto) a) Mostre que

$$\int\int_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS = \int\int\int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\, dxdydz.$$

(Dica: Comece calculando $\nabla.(f\nabla g)$ e lembre que $\Delta f = \nabla.(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$).

(1,25 ponto) b) Mostre que:

i) Se $\Delta f = 0$ em Ω, então $\int\int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0$.

ii) Se existem números reais α e β, com pelo menos um deles diferente de zero e tais que $\alpha f + \beta\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ e $\alpha g + \beta\frac{\partial g}{\partial n} = 0$ em $\partial\Omega$, então $\int\int\int_\Omega f\Delta g dxdydz = \int\int\int_\Omega g\Delta f dxdydz$.

Exercício 4

(2 pontos) Considere C a curva dada pela intersecção entre o cilindro $x^2+y^2 = a^2$ e o plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$, em que $a > 0$ e $b > 0$. O objetivo do exercício é mostrar a seguinte igualdade **sem usar integral de linha**:

$$\int_C (y-z)\, dx + (z-x)\, dy + (x-y)\, dz = 2\pi a(a+b).$$

Para isso, use o Teorema de Stokes e transforme a integral acima na integral de fluxo de uma função sobre uma superfície adequada. Ache uma orientação apropriada da normal da superfície (o que equivale a achar um sentido adequado para a curva C) a fim de obter sinal correto do lado direito da equação.

Formulário.

Definição 1. Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização e $S = \varphi(\Omega)$. Nestas condições:

1) A área da superfície S é definida como
$$\int\int_\Omega \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv.$$

2) A integral de superfície de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sobre S, em que $S \subset U$, é definida como
$$\int\int_S f dS = \int\int_\Omega f \circ \varphi(u,v) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv.$$

3) O fluxo de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na direção n, em que $S \subset U$, é definido como $\int\int_S \langle f, n\rangle \, dS$. Portanto, é calculado pela expressão
$$\int\int_\Omega \left\langle f \circ \varphi(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle dudv.$$

Teorema 1. *O teorema do divergente nos diz que se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado e conexo e se $\partial\Omega$ for suficientemente regular (de classe C^1, ou cubos, poliedros, semicírculos e etc) e se $u : U \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1, em que U é um aberto tal que $\overline{\Omega} \subset U$, então*
$$\int\int\int_\Omega \nabla . u dx = \int\int_{\partial\Omega} \langle u, n\rangle \, dS,$$
em que n é a normal unitária que aponta para fora de Ω.

Teorema 2. *O teorema de Stokes nos diz que se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de dimensão 2 com bordo suficientemente regular (por exemplos, curvas de classe C^1), e se $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ é uma função de classe C^1, em que $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ e Ω é um aberto, então*
$$\int\int_S \nabla \times u . n dS = \int_{\partial S} u . d\alpha,$$
em que $\int_{\partial S} u . d\alpha$ é a integral de linha sobre o bordo da superfície e n é uma normal unitária da superfície. A integração de linha obedece a regra da mão direita.