

PRIMEIRA PROVA - ÁLGEBRA LINEAR TURMA 1.

A prova é individual, porém o uso de referências, como livros e cadernos, é livre. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Não use determinantes, produtos internos e etc. para resolver os exercícios. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Como na aula \mathbb{F} é sempre \mathbb{R} ou \mathbb{C} . $M_n(\mathbb{F})$ são as matrizes quadradas $n \times n$ em \mathbb{F} e $P_n(\mathbb{F})$ são os polinômios de grau menor ou igual a n .

Boa Prova!

(2 PONTOS) EXERCÍCIO 1

Determine os valores de a para os quais o sistema abaixo é incompatível (não tem solução), compatível determinado (tem solução única) e compatível indeterminado (tem infinitas soluções). Ache as soluções do sistema para os casos em que elas existam.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y - az = a \end{cases}$$

EXERCÍCIO 2

No espaço vetorial $P_3(\mathbb{F})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 3, considere as seguintes bases ordenadas: $B = (1, t, t^2, t^3)$ e $C = (1, 1 + t, 1 + t^2, t^3)$.

(1,5 ponto) a) Escreva os elementos da base ordenada C em função dos elementos da base ordenada B . Determine I_{CB} , a matriz de mudança de base de B para C .

(1 ponto) b) Determine I_{BC} , a matriz de mudança de base de C para B .

(1 ponto) c) Se um polinômio p tem coordenadas $(1, 1, 1, 1)$ na base canônica, ou seja, na base B , quais são as suas coordenadas na base ordenada C ?

(0,5 ponto) d) $P_3(\mathbb{F})$ é isomorfo a $M_2(\mathbb{F})$? Justifique.

EXERCÍCIO 3

Seja $P_2(\mathbb{F})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2.

(1 ponto) a) Sabendo que a base canônica deste espaço é $\{1, t, t^2\}$, determine a sua dimensão.

(1 ponto) b) Mostre que $B' = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + t + t^2\}$ é base de $P_2(\mathbb{F})$.

EXERCÍCIO 4

Seja $F : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por $F(p(t)) = tp'(t)$.

(1 ponto) a) Determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de F .

(1 ponto) b) Escreva a matriz de F em relação à base ordenada $B = (1, t, t^2)$, ou seja, F_B . Se $p \in P_2(\mathbb{R})$ é um polinômio com coordenadas $(0, 0, 1)$ na base ordenada B , ou seja, $p(t) = t^2$, quais são as coordenadas de $F(p)$ na base ordenada B ?