PROVA 1 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Seja $\mathcal{P}_2$ o conjunto dos polinômios reais de ordem menor ou igual a 2: $p(x) = ax^2 + bx + c$. Considere a função $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ dada por $T(p)(x) = x\frac{dp}{dx}(x)$.

(1,25 Ponto) a) Mostre que T é uma transformação linear. Determine o núcleo, a dimensão do núcleo, a imagem e a dimensão da imagem de T.

(1,25 Ponto) b) Sejam $\mathcal{B} = \left(1, x, x^2\right)$ e $\mathcal{C} = \left(1, 1 + x, x + x^2\right)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$. Ache a matriz que corresponde a T, considerando $\mathcal{P}_2$ com base $\mathcal{B}$ tanto no domínio quanto no contradomínio de T. Ache também a matriz que corresponde a T, considerando $\mathcal{P}_2$ com base $\mathcal{C}$ tanto no domínio quanto no contradomínio de T.

Exercício 2

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z, w, v) = (x + y, y + z + w, x + y + z + w + v)$.

(1,25 Ponto) a) Ache uma base ortonormal do núcleo de T.

(1,25 Ponto) b) Ache todos os elementos de $\mathbb{R}^5$ tais que $T(x, y, z, w, v) = (3, 2, 5)$.

(0,5 Ponto) c) Qual a dimensão da imagem de T? A transformação linear T é sobrejetora?

Exercício 3

(1 ponto) a) Considere o seguinte produto interno no conjunto de todos os polinômios reais:

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt.$$

Prove que $\left\{1, \sqrt{3}\,(2t - 1)\right\}$ é um conjunto ortonormal.

(1 ponto) b) Ache a e b em $\mathbb{R}$ tais que o valor da integral abaixo seja o menor possível:

$$\int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 dt.$$

Exercício 4

(1,25 ponto) a) Seja V um espaço vetorial real com produto interno $\langle .,.\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ e seja $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ a norma definida por esse produto interno: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Mostre que

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

(1,25 ponto) b) Seja $\|.\|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$. Existe um produto interno $\langle .,.\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\|(x, y)\|_1 = \sqrt{\langle (x, y), (x, y)\rangle}$?

FORMULÁRIO.

Definição 1. Um **sistema linear** é um conjunto de equações da forma

$$(S)\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + ... + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases},$$

em que $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ e $\beta_1,... \ \beta_m \in \mathbb{R}$ são dados e $x_1,... \ ,x_n$ são as incógnitas, ou seja, os valores que queremos determinar. Dizemos que o sistema linear é homogêneo se $\beta_1 = ... = \beta_m = 0$.

Definição 2. Podemos definir três operações elementares sobre os sistemas lineares. Estas operações são:

(I) Permutar duas equações do sistema.

(II) Multiplicar uma das equações do sistema por um $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

(III) Somar uma das equações do sistema por um múltiplo de outra linha.

Proposição 1. *Se $C \subset \mathbb{R}^n$ é o subespaço das soluções do sistema homogêneo S_{hom} e $v = (x_1, ..., x_n)$ uma solução particular do sistema S, então o conjunto das soluções do sistema S é dado por*

$$v + C,$$

ou seja é o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ dados por $v + u$, em que $u \in C$.

Definição 3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma base de V é um subconjunto finito $B = \{u_1, ..., u_n\} \subset V$ tal que

a) B gera V, ou seja, $L(B) = V$ (todos elementos de V são combinações lineares de elementos de B)

b) B é linearmente independente (L.I.), ou seja, $\alpha_1.u_1 + ... + \alpha_n.u_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Por convenção a base dos espaços vetoriais que contêm apenas o vetor nulo é o conjunto vazio.

Definição 4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. O número de vetores contidos numa base de V é chamado de **dimensão** do espaço vetorial V.

Definição 5. Sejam V e W dois espaços vetoriais reais de dimensão finita. Uma transformação linear $T : V \to W$ é uma função que satisfaz $T(u + v) = T(u) + T(v)$ e $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ para todo $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definição 6. Sejam U e V espaços vetoriais e $F : U \to V$ uma transformação linear. Então o **núcleo de** F é o conjunto $N(F) = \{u \in U;\ F(u) = 0\}$ e a **imagem** de F é o conjunto $Im(F) = \{F(x);\ x \in U\}$. Dizemos que F é **sobrejetora** se $Im(F) = V$. Dizemos que é **injetora** se $F(u) = F(v) \implies u = v$. A transformação F é injetora se, e somente se, $N(F) = \{0\}$.

Definição 7. Sejam U e V espaços vetoriais finitamente gerados sobre $\mathbb{R}$ de dimensões n e m, respectivamente. Sejam dadas uma base ordenada $B = (u_1, ..., u_n)$ do espaço vetorial U, uma base ordenada $C = (v_1, ..., v_m)$ do espaço vetorial V e uma transformação linear $F : U \to V$. Cada $F(u_j)$ pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos elementos de C. Assim

$$\begin{array}{c} F(u_1) = \alpha_{11}v_1 + ... + \alpha_{m1}v_m \\ \vdots \\ F(u_n) = \alpha_{1n}v_1 + ... + \alpha_{mn}v_m \end{array}, \text{ ou simplesmente } F(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}v_i.$$

A matriz (α_{ij}) é chamada de **matriz de F em relação às bases** B **e** C.

Teorema 1. *(Teorema do Núcleo e da Imagem) Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $F : U \to V$ uma transformação linear. Logo*

$$\dim(U) = \dim(N(F)) + \dim(Im(F)).$$

Definição 8. Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ para todos os vetores u, v e w pertencentes a V. (2) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, u, v \in V$.
(3) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, $\forall u, v \in V$. (4) $\langle u, u\rangle > 0$ se $u \neq o$.

A norma $\|.\|$ em relação ao produto interno $\langle ., .\rangle$ é a função $\|.\| : V \to [0, \infty[$ dada por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Definição 9. Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Dizemos que dois vetores u e $v \in V$ são ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$. Um conjunto $S \subset V$ é ortogonal se todos os elementos de S são ortogonais entre si. Dizemos que um conjunto S é ortonormal se todos os elementos de S são ortogonais entre si e têm norma 1. Assim $S = \{u_1, ..., u_n\}$ é ortogonal se $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ se $i \neq j$ e é ortonormal se $\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

Teorema 2. *(Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt). Todo espaço vetorial de dimensão n, com $n > 1$, com produto interno possui uma base ortonormal.*

O método de ortonormalização: Seja V um espaço vetorial real e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Para achar uma base $B = \{b_1, ..., b_n\}$ ortonormal, achamos b_1 por $b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, b_2 por $b_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, b_1\rangle b_1}{\|v_2 - \langle v_2, b_1\rangle b_1\|}$ e, em geral, b_j pela fórmula abaixo:

$$b_j = \frac{v_j - \langle v_j, b_1\rangle b_1 - ... - \langle v_j, b_{j-1}\rangle b_{j-1}}{\|v_j - \langle v_j, b_1\rangle b_1 - ... - \langle v_j, b_{j-1}\rangle b_{j-1}\|}.$$

Definição 10. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $U \subset V$ um subespaço de V. Se $B = \{g_1, ..., g_r\}$ é uma base ortonormal de U, então definimos um operador linear $E : V \to V$ pela fórmula

$$E(v) = \langle v, g_1\rangle g_1 + ... + \langle v, g_r\rangle g_r.$$

E é chamado de operador de projeção ortogonal e o vetor $E(v)$ é chamado de projeção ortogonal de v sobre o subespaço U. A projeção tem a propriedade de que $\|v - E(v)\| \leq \|v - w\|$, para todo $w \in U$.