SEGUNDA PROVA - ÁLGEBRA LINEAR TURMA 1.

A prova é individual, porém o uso de referências, como livros e cadernos, é livre. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Como na aula $\mathbb{F}$ é sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $P_n(\mathbb{F})$ são os polinômios de grau menor ou igual a n.

Boa Prova!

(2 Pontos) Exercício 1

Determine pelo processo de Gram-Schmidt uma base ortonormal para o subespaço vetorial $[(1,1,0),(0,1,1)]$ de $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Exercício 2

Seja $W \subset \mathbb{R}^4$ o subespaço vetorial, cuja base ortonormal é $B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), (0,0,0,1)\right\}$. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual.

(1 ponto) a) Determine a projeção ortogonal do vetor $(1,0,0,0)$ sobre este subespaço.

(1 ponto) b) Determine o complemento ortogonal do subespaço W.

Exercício 3

(1,5 ponto) Seja $P_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2. Seja $F : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por

$$F(p(t)) = tp'(t) + p(t).$$

Calcule $F(1)$, $F(t)$ e $F(t^2)$ e ache a matriz de F na base canônica $(1,t,t^2)$. Determine o determinante de F.

(0,5 ponto) Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $T : V \to V$ uma isometria. Quanto é o valor de $|\det(T)|$, ou seja, o módulo do determinante de T? Justifique.

Exercício 4

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão 4 com um produto interno. Suponha que B seja uma base ortonormal ordenada deste espaço. Seja $F : V \to V$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base ortonormal ordenada B é dada por

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1 ponto) a) Esta transformação linear é auto-adjunta? Ela é uma isometria? Justifique.

(1 ponto) b) Escreva o polinômio característico de F e determine seus auto-valores.

(1 ponto) c) Determine uma base de V formada por auto-vetores de F, mostrando que F é diagonalizável.

(1 ponto) d) Ache uma matriz diagonal que seja semelhante à F_B.