PROVA 2 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

(1,5 ponto) Ache todos os autovalores e todos os autovetores da transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta transformação linear é diagonalizável?

(1 ponto) b) Considere as matrizes complexas $A\in M_n(\mathbb{C})$ e $B\in M_5(\mathbb{C})$ abaixo. Elas são diagonalizáveis (como matrizes complexas) ou não? Justifique.

$$\text{i) } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } B\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2

Considere a matriz $A\in M_n(\mathbb{R})$ dada como $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(2 pontos) a) Ache $P\in M_n(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Usando a matriz P, calcule e^{tA}.

(0,5 ponto) b) Resolva a equação $Y'(t)=AY(t)$, em que $Y(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 3

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $T:V\to V$ uma transformação linear.

Vamos supor inicialmente que V seja um espaço vetorial complexo e defina $Q:V\to\mathbb{C}$ por $Q(u)=\langle Tu,u\rangle$.

(1 ponto) a) Mostre que $Q(u+v)=Q(u)+Q(v)+\langle Tu,v\rangle+\langle Tv,u\rangle$ e $Q(u+iv)=Q(u)+Q(v)-i\langle Tu,v\rangle+i\langle Tv,u\rangle$. Conclua que se $Q(w)=0$ para todo $w\in V$, então $T=0$.

(1 ponto) b) Mostre que $Q(u)\in\mathbb{R}$ para todo $u\in V$ se, e somente se, T é auto-adjunto.

Suponha agora que V seja um espaço vetorial real e $Q:V\to\mathbb{R}$ seja definido como $Q(u)=\langle Tu,u\rangle$.

(1 ponto) c) É verdade que se $Q(u)=0$ para todo $u\in V$, então $T=0$? (Dica: Considere $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y)=(-y,x)$.)

Exercício 4

Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno $\langle .,.\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$

(1 ponto) a) Mostre que se $T:V\to V$ é auto-adjunto, então seus auto-valores são reais e que, se $T:V\to V$ é unitário, então seus auto-valores têm módulo igual a 1.

(1 ponto) b) Suponha que $T^*T=TT^*$. Mostre que $u\in V$ é tal que $T(u)=\lambda u$ se, e somente se, $T^*(u)=\overline{\lambda}u$. (Dica: Mostre que se $T^*T=TT^*$, então $\|(T-\lambda I)w\|^2=\left\|\left(T^*-\overline{\lambda}I\right)w\right\|^2$, para todo $\lambda\in\mathbb{C}$ e $w\in V$).

FORMULÁRIO.

Definição 1. Seja V um espaço vetorial complexo. Um produto interno sobre V é uma função $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1)$\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ para todos os vetores u, v e w pertencentes a V. (2) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $u, v \in V$. (3) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, $\forall u, v \in V$. (4) $\langle u, u\rangle > 0$ se $u \neq 0$.

A norma $\|.\|$ em relação ao produto interno $\langle ., .\rangle$ é a função $\|.\| : V \to [0, \infty[$ dada por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Definição 2. Seja V um espaço vetorial real ou complexo e $T : V \to V$ uma transformação linear. Um vetor $u \in V$, $u \neq 0$, é um auto-vetor de T se existe λ tal que $T(u) = \lambda u$. Neste caso, λ é um auto-valor de T associado a u e u é um auto-vetor de T associado a λ.

Proposição 1. *Seja V um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita, $B = (v_1, ..., v_n)$ uma base ordenada de V e $T : V \to V$ uma transformação linear de V em V. Logo λ é um auto-valor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) := det(T_B - \lambda I_n) = 0$, em que T_B é a matriz de T na base B. O polinômio p_T se chama polinômio característico. Ele independe da base B escolhida.*

Definição 3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador $T : V \to V$ se diz diagonalizável se existe uma base de V formada apenas de auto-vetores de T. Uma matriz A, $n \times n$, real ou complexa, é diagonalizável se existir uma matriz M, $n \times n$, tal que $M^{-1}AM = D$, em que D é uma matriz diagonal.

Proposição 2. *Seja T uma matriz real. Dizemos que T é diagonalizável em $\mathbb{R}$ se, e somente se,*

1) O polinômio característico de T tem todas as suas raízes em $\mathbb{R}$: $p_T(t) = (t-\lambda_1)^{r_1} ... (t-\lambda_m)^{r_m}$, em que $r_1 + ... + r_m = n$ e λ_j são as raízes (distintas entre si) de p_T que devem pertencer a $\mathbb{R}$.

2) A multiplicidade algébrica de cada auto-valor λ_j é igual a sua multiplicidade geométrica, ou seja, $r_j = dim\,(Ker\,(T - \lambda_j I))$.

Seja T uma matriz complexa. Dizemos que T é diagonalizável em $\mathbb{C}$ se, e somente se, o item 2) acima é válido (o item 1) sempre é verdadeiro).

Definição 4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, complexo e com produto interno. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. O operador adjunto $T^* : V \to V$ é o único operador tal que $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^* v\rangle$, para todo $u, v \in V$. Dizemos que T é auto-adjunto se $T = T^*$. Dizemos que T é unitário se $T^* T = I$. Em particular, se T é unitário, então $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$, $\forall u, v \in V$.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ é unitária se $A^* A = I$, em que $A^*_{ij} = \overline{A_{ji}}$ é a matriz transposta. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ é auto-adjunta se $A^* = A$.

Proposição 3. *Num espaço vetorial complexo de dimensão finita, todo operador auto-adjunto ou unitário é diagonalizável. Em particular, toda matriz complexa auto-adjunta ou unitária é diagonalizável.*

Definição 5. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$. Definimos $e^{tA} := I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n$.

Proposição 4. *Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $P \in M_n(\mathbb{C})$ é tal que $P^{-1}AP = D$, então $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$.*

Proposição 5. *Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $Y'(t) = AY(t)$ com $Y(0) = Y_0$, então $Y(t) = e^{tA} Y_0$.*