PROVA 2 - MATEMÁTICA 4 (CCM 0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

(2 Pontos) Calcule a área da superfície dada por $z^2 = x^2 + y^2$, em que $0 \leq z \leq \frac{3-y}{2}$.

Exercício 2

Seja S_1 o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, e n_1 a normal unitária que aponta para fora da esfera. Seja S_2 a região $\left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3;\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ e $n_2 = (0, 0, -1)$.

(1 Ponto) a) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função dada por $f(x, y, z) = \left(2x + \operatorname{sen}\left(y^2\right), -4y + \cos\left(x^2 + z^6\right), 2z + e^{15x}\right)$. Calcule o fluxo de f em $S = S_1 \cup S_2$ na direção n, em que n é igual a n_1 sobre S_1 e é igual a n_2 sobre S_2.

(1 Ponto) b) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função dada por $f(x, y, z) = (2x, -4y, 2z + 1)$. Calcule o fluxo de f em S_1 na direção n_1 e o fluxo de f em S_2 na direção n_2.

Exercício 3

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma região conexa e limitada com bordo $\partial\Omega$ de classe C^1. Considere o seguinte problema: Ache uma função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x),\; x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x),\; x \in \partial\Omega \end{cases},$$

em que $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u, n \rangle$ é a derivada direcional na direção de n, sendo n a normal que aponta para fora de Ω e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ funções contínuas.

(1 ponto) a) Mostre que se existe uma solução u do problema acima, então f e g devem satisfazer $\int\int\int_\Omega f(x)\, dx = \int\int_{\partial\Omega} g(x)\, dS$.

(1 ponto) b) Mostre que se v é uma outra solução do problema, então existe uma constante $C > 0$ tal que $u = v + C$.

Dica: Use o Teorema da divergência e prove que se $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2, então
i) $\int\int\int_\Omega \Delta w(x)\, dx = \int\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n}(x)\, dS$.
ii) $\int\int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial n}(x)\, dS = \int\int\int_\Omega \|\nabla w(x)\|^2\, dx$, se $\Delta w = 0$.

Exercício 4

(2 pontos) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície com bordo definida como $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $0 \leq z \leq \sqrt{2}$ e n a normal que aponta para fora da esfera de raio 2. Calcule $\int\int_S \nabla \times f.n dS$, em que $f(x, y, z) = \left(zy \cos\left(\frac{\pi z^2}{2}\right), z\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z^2}{2}\right), yz\right)$.

Exercício 5

(1 ponto) a) Considere a 1-forma diferencial $\omega(x, y, z) = f_1(x, y, z)\, dx + f_2(x, y, z)\, dy + f_3(x, y, z)\, dz$ em $\mathbb{R}^3$. Existe uma função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ tal que $d\omega(x, y, z) = g_1(x, y, z)\, dy \wedge dz + g_2(x, y, z)\, dz \wedge dx + g_3(x, y, z)\, dx \wedge dy$. Quem é essa função? Justifique calculando $d\omega$.

(1 ponto) b) Considere a 2-forma diferencial $\omega(x, y, z) = f_1(x, y, z)\, dy \wedge dz + f_2(x, y, z)\, dz \wedge dx + f_3(x, y, z)\, dx \wedge dy$ em $\mathbb{R}^3$. Existe uma função g tal que $d\omega(x, y, z) = g(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz$. Quem é essa função? Justifique calculando $d\omega$.

Formulário.

Definição 1. Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização e $S = \varphi(\Omega)$. Nestas condições:

1) A área da superfície S é definida como

$$\int\int_\Omega \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv.$$

2) A integral de superfície de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sobre S, em que $S \subset U$, é definida como

$$\int\int_S f dS = \int\int_\Omega f \circ \varphi(u,v) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv.$$

3) O fluxo de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na direção n, em que $S \subset U$, é definido como $\int\int_S \langle f, n \rangle dS$. Portanto, é calculado pela expressão

$$\int\int_\Omega \left\langle f \circ \varphi(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle dudv.$$

Teorema 1. *O teorema do divergente nos diz que se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado e convexo e se $\partial\Omega$ for suficientemente regular (de classe C^1, ou cubos, poliedros, semicírculos e etc) e se $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1, então*

$$\int\int\int_\Omega \nabla . u dx = \int\int_{\partial\Omega} \langle u, n \rangle dS,$$

em que n é a normal unitária que aponta para fora de Ω.

Teorema 2. *O teorema de Stokes nos diz que se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de dimensão 2 com bordo suficientemente regular (por exemplos, curvas de classe C^1), e se $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ é uma função de classe C^1, em que $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ e Ω é um aberto, então*

$$\int\int_S \nabla \times u.ndS = \int_{\partial S} u.d\alpha,$$

em que $\int_{\partial S} u.d\alpha$ é a integral de linha sobre o bordo da superfície e n é uma normal unitária da superfície. A integração de linha obedece a regra da mão direita.

Definição 2. Uma p-forma ω em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\omega : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com p-cópias de $\mathbb{R}^n$, linear em cada uma das coordenadas e alternada. Por exemplo, temos

$$dx_i(v_1, ..., v_n) = v_i,$$
$$dx_i \wedge dx_j\left((v_1, ..., v_n), (w_1, ..., w_n)\right) = v_i w_j - v_j w_i.$$

Logo $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ e $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Uma p-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ é uma função ω definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e que leva cada ponto $x \in \Omega$ a uma p-forma $\omega(x)$.

Definição 3. Dado uma p-forma $\omega(x) = \sum_I a_I dx_I$, em que $dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$, definimos a $p+1$-forma $d\omega$ como

$$d\omega(x) = \sum_I \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x_k}(x)\, dx_k \wedge dx_I.$$