PROVA 3 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA32018

A prova deve ser entregue (sem atraso!) no dia 6 de dezembro de 2018, quinta-feira, às 17 horas, em sala de aula.

Os formulários contêm resultados que podem ser úteis na resolução dos problemas. Se quiserem, vocês podem usar outros resultados, desde que estejam nos formulários das outras questões ou tenham sido dados em sala de aula. Caso contrário, é preciso justificar o resultado que está sendo usado.

Boa Prova!

Formulário da primeira questão

Definição 1. Definimos a distância $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ como a função dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

em que $\|x\| = \|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ é a norma Euclidiana.

Proposição 1. *A função distância satisfaz*

1) $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$.

2) $d(x, y) = d(y, x)$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2. Seja $X \in \mathbb{R}^n$. Denotamos por $X^c = \{y \in \mathbb{R}^n;\ y \notin X\}$ o complementar de X.

O interior de X, denotado por $\text{int}(X)$, é o conjunto de todos os pontos tais que $x \in \text{int}(X)$ se, e somente se, existe $\epsilon > 0$ tal que a bola aberta $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ d(y, x) < \epsilon\}$ está contida em X. Em particular, $\text{int}(X) \subset X$.

A fronteira de X, denotada por ∂X, é o conjunto de todos os pontos tais que $x \in \partial X$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, temos $B(x, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $B(x, \epsilon) \cap X^c \neq \emptyset$, ou seja, toda bola aberta com centro em x contém elementos que estão dentro e fora de X. Sempre podemos decompor $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}^n = \text{int}(X) \cup \partial X \cup \text{int}(X^c)$, em que os três conjuntos são disjuntos.

O fecho de X, denotado por $\overline{X}$, é o conjunto de todos os pontos tais que $x \in \overline{X}$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, temos que $B(x, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$. Dessa maneira, sempre temos a igualdade $\overline{X} = \text{int}(X) \cup \partial X = X \cup \partial X$ e $X \subset \overline{X}$.

Definição 3. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ se $X = \text{int}(X)$, ou seja, para todo $x \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset X$. Dizemos que X é um conjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ se X^c é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2. *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é fechado de* $\mathbb{R}^n$ *se, e somente se,* $X = \overline{X}$.

(2,5 pontos) Exercício 1

a) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ o conjunto de todos os abertos de $\mathbb{R}^n$ contidos em X ($A_\alpha \subset X$, para todo $\alpha \in \Lambda$). Prove que $\text{int}(X) = \cup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$. Conclua que $\text{int}(X)$ é o maior aberto de $\mathbb{R}^n$ que está contido em X no seguinte sentido: $\text{int}(X) \subset X$ e se A é aberto de $\mathbb{R}^n$ e $A \subset X$, então $A \subset \text{int}(X)$.

b) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ o conjunto de todos os fechados de $\mathbb{R}^n$ que contêm X ($F_\alpha \supset X$, para todo $\alpha \in \Lambda$). Prove que $\overline{X} = \cap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$. Conclua que $\overline{X}$ é o menor fechado de $\mathbb{R}^n$ que contém X no seguinte sentido: $X \subset \overline{X}$ e se F é fechado de $\mathbb{R}^n$ e $X \subset F$, então $\overline{X} \subset F$.

c) Existe um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\text{int}(X) = \emptyset$ e $\partial X = \mathbb{R}^n$?

FORMULÁRIO DA SEGUNDA QUESTÃO

Proposição 3. *Seja* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathbb{R}^n$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$. *Logo se* $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jn})$ *e* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *então* $\lim_{j\to\infty} x_j = x$ *se, e somente se,* $\lim_{j\to\infty} x_{jk} = x_k$, *para todo* $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Proposição 4. *Seja* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathbb{R}^n$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\lim_{j\to\infty} x_j = x$. *Se* $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma subsequência de* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, *então* $\lim_{k\to\infty} x_{j_k} = x$, *ou seja, a subsequência converge e para o mesmo limite da sequência original.*

Proposição 5. *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$ *se, e somente se, para toda sequência* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *contida em* X *tal que* $\lim_{j\to\infty} x_j = x \in \mathbb{R}^n$, *temos* $x \in X$, *ou seja, o limite de sequências convergentes contidas em* X *tem limite contido em* X.

Definição 4. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto se X é um conjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ e limitado.

Proposição 6. *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é compacto se, e somente se, para toda sequência* $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *contida em* X, *existe uma subsequência* $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge para um elemento* $x \in X$.

(2,5 pontos) EXERCÍCIO 2
Neste problema consideremos dois conjuntos $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $X_2 \subset \mathbb{R}^m$.
Definimos o conjunto $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m};\, x_1 \in X_1 \,\text{e}\, x_2 \in X_2\}$.

a) Prove que se X_1 e X_2 são abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, então $X_1 \times X_2$ é um aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

b) Prove que se X_1 e X_2 são fechados de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, então $X_1 \times X_2$ é um fechado de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

c) Prove que se X_1 e X_2 são compactos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, então $X_1 \times X_2$ é um compacto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Dica: Para os itens b) e c), use sequências.

FORMULÁRIO DA TERCEIRA QUESTÃO

Definição 5. Dizemos que $p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ é uma norma se
1) $p(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.
2) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.
3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 7. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função. Dizemos que f é contínua se para todo $x \in X$ e $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, que pode depender de x e de ϵ, tal que se $d(y, x) < \delta$, então $d(f(y), f(x)) < \epsilon$.*

Dizemos que f é uma função uniformemente contínua se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in X$ e $d(x, y) < \delta$, então $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Dizemos que f é uma função Lipshitz se existe $C > 0$ tal que $d(f(y), f(x)) \leq C d(x, y)$, para todo $x, y \in X$.

Proposição 8. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $K \subset X$ um conjunto compacto de $\mathbb{R}^m$. Logo $f(K)$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Em particular, se $n = 1$, então existem $a, b \in K$ tais que*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in K.$$

(2,5 pontos) EXERCÍCIO 3

Seja (e_j) a base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é, $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$.

a) Seja $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma norma qualquer. Prove que

$$p(x) \leq n \max \{p(e_1), ..., p(e_n)\} \|x\|.$$

b) Usando o item *a*), conclua que p é uma função Lipschitz e, portanto, uniformemente contínua.

c) Sabemos que o conjunto $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$ é um compacto. Prove que existe $C > 0$ tal que $p(x) \geq C$ para todo $x \in S^{n-1}$. Conclua que $p(x) \geq C \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

d) Sejam p e q duas normas em $\mathbb{R}^n$. Prove, usando os itens *a*) e *c*), que existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$C_1 p(x) \leq q(x) \leq C_2 p(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Formulário da quarta questão

Definição 6. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $X = A \cup B$ é uma cisão de X se $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Dizemos que a cisão é trivial se A ou B é igual a $\emptyset$.

Definição 7. Dizemos que uma função contínua $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ é um caminho que liga x a y se $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. Dizemos que o caminho está contido em $X \subset \mathbb{R}^n$ se $\alpha(t) \in X$ para todo $t \in [0,1]$.

Observamos que se existe um caminho α que liga x a y, então existe um caminho $\tilde{\alpha}$ que liga y a x. Basta definir $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$. Sempre existe um caminho que liga x a x. Basta definir $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ por $\alpha(t) = x$, para todo $t \in [0,1]$. Se existe um caminho α que liga x a y e um caminho β que liga y a z, então existe um caminho γ que liga x a z. Basta definir

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), \, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1), \, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Definição 8. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conexo se toda cisão $X = A \cup B$ de X é necessariamente trivial. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos se para todo x e y pertencentes a X existe um caminho α que liga x a y e está contido em X.

Proposição 9. *Seja $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$. Se $\cap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$, então $\cup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ é um conjunto conexo.*

(2,5 pontos) Exercício 4

a) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Para todo $x \in X$, defina $C_x \subset X$ como a união de todos os conjuntos conexos contidos em X e que contêm x. Prove que C_x é um conexo.

b) Prove que se x e y pertencem a X, então $C_x \cap C_y = \emptyset$ ou $C_x = C_y$. Assim, a união $X = \cup_{x \in X} C_x$ pode ser escrita como uma união de conjuntos conexos disjuntos. Esses conjuntos são chamados de componentes conexas de X.

c) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Para todo $x \in X$, defina $C_x \subset X$ como o conjunto de todos os pontos $y \in X$ que podem ser ligados a x através de um caminho. Prove que C_x é conexo por caminhos.

d) Prove que se x e y pertencem a X, então $C_x \cap C_y = \emptyset$ ou $C_x = C_y$. Assim, a união $X = \cup_{x \in X} C_x$ pode ser escrita como uma união de conjuntos conexos por caminhos disjuntos. Esses conjuntos são chamados de componentes conexas por caminhos de X.