PROVA 3 - MATEMÁTICA 4 (CCM 0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Num jogo da mega sena são sorteados 6 números entre sessenta possibilidades. Para cada sorteio não importa a ordem em que as bolas são sorteadas. Os possíveis números sorteados estão no conjunto $\{1,2,3,...,58,59,60\}$.

(1,5 Ponto) a) Calcule a probabilidade de que todos números sorteados pertençam a uma mesma dezena? Por exemplo: $\{1,2,3,4,5,6\}$, $\{32,33,35,36,38,39\}$, $\{50,51,56,57,58,59\}$ e etc. Para tanto, primeiro calcule o número de sorteios em que isso ocorre e divida pelo número total de sorteios possíveis na mega sena, lembrando sempre que a ordem dos números sorteados não importa. (Tome cuidado. Na primeira dezena temos 9 números: $\{1,...,9\}$, nas demais temos 10 números, por exemplo: $\{20,21,...,29\}$).

(1 Ponto) b) Suponha que todos os números sorteados pertençam a $\{50,51,52,...,59\}$. Quantas sorteios (a ordem em que os números foram sorteados não importa!) são possíveis em que no final obtemos 4 números em sequência e dois fora da sequência. Por exemplo: $\{50,51,52,53,55,56\}$, $\{50,51,52,53,55,57\}$, $\{50,53,54,55,56,58\}$, $\{50,51,56,57,58,59\}$ e etc. (Dica: Divida entre os casos em que temos sequências de 4 números começando com 50 ou 56 e os casos em que temos sequências começando com 51, 52, 53, 54 ou 55)

Exercício 2

Um grupo de pessoas está jogando dardos. Suponha que o alvo seja uma bola unitária em $\mathbb{R}^2$, isto é, $S = B_1(0) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x^2+y^2<1\right\}$. Esse grupo é composto de pessoas pouco talentosas. Elas nunca erram o alvo, mas o acertam de forma completamente aleatória. Desta maneira, a probabilidade de que um dardo atinja um conjunto $A \subset B_1(0)$ é dada por

$$P(A) = \frac{\acute{A}rea\,(A)}{\acute{A}rea\,(B_1(0))} = \frac{\acute{A}rea\,(A)}{\pi}.$$

(1,5 Ponto) a) Considere as seguintes variáveis aleatórias $X, Y, Z : B_1(0) \to \mathbb{R}$ dadas por $X(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $Y = X^2$, $Z = e^{X^2}$. Determine a função de distribuição e a função de densidade de cada uma dessas variáveis aleatórias. (Dica: observe que $(X \le r) = X^{-1}(]-\infty, r]) = B_r(0)$, quando $0 < r < 1$.)

(1 Ponto) b) Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

Exercício 3

Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade, A e B eventos.

(1,5 ponto) a) Se $\frac{P(A^c)}{P(A)} = 3$ e $\frac{P(A\cup B)}{P((A\cup B)^c)} = 4$, mostre que $\frac{11}{20} \le P(B) \le \frac{4}{5}$.

(1 ponto) b) Se A e B são independentes, mostre que $P(A \cup B) = 1 - P(A^c)\,P(B^c)$.

Dica: Use nos itens acima que $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercício 4

Um material radioativo obedece uma lei de decaimento exponencial com tempo de meia vida de 5 anos. Assim, se $X : S \to [0, \infty[$ corresponde ao tempo de decaimento de um átomo, então F_X tem uma distribuição exponencial tal que $P(X \le 5) = \frac{1}{2}$.

(1,5 ponto) a) Calcule a probabilidade de que o átomo se desintegre num intervalo $X \ge 10$ (em mais do que 10 anos). Calcule também a probabilidade de que o átomo se desintegre num intervalo $5 \le X \le 10$ (entre 5 e 10 anos).

(1 ponto) b) Qual é a probabilidade que o átomo se desintegre em até 1.000.000.005 anos ($X \le 1.000.000.005$), dado que ele não se desintegrou em 1.000.000.000 de anos ($X \ge 1.000.000.000$). (Use probabilidade condicional).

Formulário.

Definição 1. Um espaço de probabilidade $(S, \mathcal{B}, P)$ consiste de

1) Um conjunto S.
2) Uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ de S. A $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ é uma coleção de subconjuntos de S (chamados de eventos) que satisfaz:
a) S e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{B}$.
b) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$, então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.
c) Se $A \in \mathcal{B}$, então $A^c \in \mathcal{B}$.
3) Uma medida de probabilidade $P : \mathcal{B} \to [0, 1]$. A medida de probabilidade P é uma função que satisfaz:
a) $P(S) = 1$ e $P(\emptyset) = 0$.
b) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ é uma coleção de conjuntos disjuntos, então $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

No caso em que $S \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, costuma-se tomar como $\mathcal{B}$ a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de S. Este conjunto é muito grande e contém também todos os fechados contidos em S.

Definição 2. Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade, A e B dois eventos de S. Dizemos que A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Definição 3. Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade, A e B dois eventos de S com $P(B) \neq 0$. A probabilidade de que A ocorra, dado que B ocorreu é definida como $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. $P(A|B)$ é chamada de probabilidade condicional de A dado que B ocorre.

Definição 4. Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que $X : S \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória se $X^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{B}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A função distribuição associada a X é a função $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definida como $F_X(t) = P(X \leq t)$. Dizemos que F_X possui uma função de densidade $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ se

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\, ds.$$

Neste caso, $f_X(t) = \frac{dF_X}{dt}(t)$ nos pontos em que F_X é contínua.

Observamos se F_X é contínua, então $P([a, b]) = P([a, b[) = P(]a, b]) = P(]a, b[) = F_X(b) - F_X(a)$. Além disso, $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$ e $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$.

Exemplo 5. Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que $X : S \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória com distribuição exponencial se existe $\lambda > 0$ tal que

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t},\ t > 0 \\ 0,\ t \leq 0 \end{cases} \text{ e } f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0 \\ 0,\ t \leq 0 \end{cases}.$$

Definição 6. Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade e $X : S \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória com distribuição contínua e densidade de probabilidade f_X. Definimos

1) A esperança de X por $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\, dt$.
2) A variância de X por $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)\, dt$.

Proposição 1. *Num conjunto $S = \{a_1, ..., a_N\}$, temos*

1) A quantidade de sequencias de m elementos distintos de S (tais como $(b_1, ..., b_m)$, em que $b_1,\ldots,b_m \in S$ são todos diferentes) é dada por $N(N-1)(N-2)\ldots(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$. A ideia é que podemos ter N elementos na primeira escolha, $N-1$ na segunda e assim por diante. (Note que aqui a ordem importa)

2) A quantidade de subconjuntos de m elementos distintos de S (tais como $\{b_1, ..., b_m\}$, em que $b_1,\ldots,b_m \in S$ são todos diferentes) é dada por $\frac{N(N-1)(N-2)\ldots(N-m+1)}{m(m-1)(m-2)\ldots.2.1} = \frac{N!}{m!(N-m)!} = \binom{N}{m}$. A ideia é que a mesma combinação pode aparecer de $m!$ maneiras distintas. Portanto, precisamos dividir por $m!$. (Note que aqui a ordem não importa)