PROVA SUBSTITUTIVA - ÁLGEBRA LINEAR TURMA 1.

A prova é individual, porém o uso de referências, como livros e cadernos, é livre. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.
Boa Prova!

Exercício 1

Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $F(x, y) = (x, y, x - y)$.

(1 Ponto) a) Determine uma base e a dimensão da imagem de F e determine a dimensão do núcleo de F.

(1,5 ponto) b) Determine os valores de $F(1, 0)$ e $F(0, 1)$ e a matriz da transformação linear F em relação às bases canônicas ordenadas $B = ((1, 0), (0, 1))$ e $B' = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, $F_{BB'}$.

Exercício 2

Seja $C = \{(a, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, a)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1 ponto) a) Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto C é uma base de $\mathbb{R}^3$?

(1,5 ponto) b) Escreva os vetores de C em termos da base canônica $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$. Para os valores de a tais que C é uma base, escreva a matriz de mudança de base B para a base C, I_{CB}, em que $C = ((a, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, a))$. Deixe a resposta em termos de a.

Exercício 3

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço vetorial gerado pelos vetores $(2, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$, ou seja, $W = [(2, 0, 1), (0, 1, 1)] \subset \mathbb{R}^3$.

(1 ponto) a) Determine pelo processo de Gram-Schmidt uma base ortonormal para o subespaço W.

(1,5 ponto) b) Determine o complemento ortogonal do subespaço W.

Exercício 4

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 3 com um produto interno. Suponha que B seja uma base ortonormal ordenada deste espaço. Seja $F : V \to V$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base ortonormal ordenada B é dada por

$$F_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1 ponto) a) Escreva o polinômio característico de F e determine os auto-valores de F.

(1 ponto) b) Para cada auto-valor de F, determine os auto-vetores associados.

(0,5 ponto) c) A transformação linear F é diagonalizável? Justifique.