PROVA SUB - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Considere o conjunto $\mathcal{P}_2$ dos polinômios reais de ordem menor ou igual a 2, isto é, $p \in \mathcal{P}_2$ se, e somente se, $p(t) = a + bt + ct^2$. Considere a função $\langle .,. \rangle : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle p, q \rangle = p(-1)\, q(-1) + p(0)\, q(0) + p(1)\, q(1).$$

(1,0 ponto) a) Mostre que a função acima define um produto interno em $\mathcal{P}_2$.

(1,0 ponto) b) Ache todos os polinômios de ordem menor ou igual a 2 que sejam ortogonais a t em relação ao produto interno acima.

(1,0 ponto) c) Considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$. Usando o método de Gram-Schmidt, ache uma base ortonormal para $\mathcal{P}_2$.

Exercício 2

Considere a matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ dada como $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1,5 ponto) a) Ache os autovalores e autovetores da matriz A. A partir deles, encontre uma matriz diagonal $D \in M_2(\mathbb{R})$ e uma matriz inversível $C \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $C^{-1}AC = D$.

(1,5 ponto) b) Calcule e^{tA} e resolva a equação $Y'(t) = AY(t)$, em que $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 3

(1,5 ponto) a) Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \|x\|^6$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função dada por $g(x) = \langle x, a \rangle$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ e $\frac{\partial g}{\partial v}(x)$.

(1,0 ponto) b) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $f(0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$, então qual é a função f?

Exercício 4

(1,5 ponto) Calcule a distância mínima entre o ponto $(1, 0)$ e a parábola $y^2 = 4x$.

Formulário.

Definição 1. Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1)$\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ para todos os vetores u, v e w pertencentes a V. (2) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$.

(3) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, $\forall u, v \in V$. (4) $\langle u, u\rangle > 0$ se $u \neq 0$.

A norma $\|.\|$ em relação ao produto interno $\langle ., .\rangle$ é a função $\|.\| : V \to [0, \infty[$ dada por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Definição 2. Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Dizemos que dois vetores u e $v \in V$ são ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$. Um conjunto $S \subset V$ é ortogonal se todos os elementos de S são ortogonais entre si. Dizemos que um conjunto S é ortonormal se todos os elementos de S são ortogonais entre si e têm norma 1. Assim $S = \{u_1, ..., u_n\}$ é ortogonal se $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ se $i \neq j$ e é ortonormal se $\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

Teorema 1. *(Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt). Todo espaço vetorial de dimensão n, com $n > 1$, com produto interno possui uma base ortonormal.*

O método de ortonormalização: Seja V um espaço vetorial real e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Para achar uma base $B = \{b_1, ..., b_n\}$ ortonormal, achamos b_1 por $b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, b_2 por $b_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, b_1\rangle b_1}{\|v_2 - \langle v_2, b_1\rangle b_1\|}$ e, em geral, b_j pela fórmula abaixo:

$$b_j = \frac{v_j - \langle v_j, b_1\rangle b_1 - ... - \langle v_j, b_{j-1}\rangle b_{j-1}}{\|v_j - \langle v_j, b_1\rangle b_1 - ... - \langle v_j, b_{j-1}\rangle b_{j-1}\|}.$$

Proposição 1. *Seja V um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita, $B = (v_1, ..., v_n)$ uma base ordenada de V e $T : V \to V$ uma transformação linear de V em V. Logo λ é um auto-valor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) := det(T_B - \lambda I_n) = 0$, em que T_B é a matriz de T na base B. O polinômio p_T se chama polinômio característico. Ele independe da base B escolhida.*

Definição 3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador $T : V \to V$ se diz diagonalizável se existe uma base de V formada apenas de auto-vetores de T. Uma matriz A, $n \times n$, real ou complexa, é diagonalizável se existir uma matriz M, $n \times n$, tal que $M^{-1}AM = D$, em que D é uma matriz diagonal.

Proposição 2. *Seja T uma matriz real. Dizemos que T é diagonalizável em $\mathbb{R}$ se, e somente se,*

1) O polinômio característico de T tem todas as suas raízes em $\mathbb{R}$: $p_T(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} ... (t - \lambda_m)^{r_m}$, em que $r_1 + ... + r_m = n$ e λ_j são as raízes (distintas entre si) de p_T que devem pertencer a $\mathbb{R}$.

2) A multiplicidade algébrica de cada auto-valor λ_j é igual a sua multiplicidade geométrica, ou seja, $r_j = dim\,(Ker\,(T - \lambda_j I))$.

Seja T uma matriz complexa. Dizemos que T é diagonalizável em $\mathbb{C}$ se, e somente se, o item 2) acima é válido (o item 1) sempre é verdadeiro).

Definição 4. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$. Definimos $e^{tA} := I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n$.

Proposição 3. *Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $P \in M_n(\mathbb{C})$ é tal que $P^{-1}AP = D$, então $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$.*

Proposição 4. *Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $Y'(t) = AY(t)$ com $Y(0) = Y_0$, então $Y(t) = e^{tA}Y_0$.*

Definição 5. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função definida num aberto Ω. Dizemos que f é diferenciável se para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe uma transformação linear $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e uma função $r_x : \{v \in \mathbb{R}^n;\ x + v \in \Omega\} \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(x+v) = f(x) + df(x)(v) + r_x(v) \quad \text{e} \quad \lim_{v \to 0} \frac{r_x(v)}{\|v\|} = 0.$$

Definição 6. Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ funções diferenciáveis tais que $f(U) \subset V$. Logo $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável e

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x))\,df(x).$$

Em particular,

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x).$$

Definição 7. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, em que Ω é um aberto, e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função C^1. Suponha que $c \in \mathbb{R}$ seja um ponto da imagem de g tal que $S = g^{-1}(c)$ é uma superfície de nível. (Em particular, $g(x) = c \implies \nabla g(x) \neq 0$).

3) Dizemos que $a \in \Omega$ é um mínimo local de f em S se existe um aberto $U \subset \Omega$ que contém a tal que $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in U \cap S$.

4) Dizemos que $a \in \Omega$ é um máximo local de f em S se existe um aberto $U \subset \Omega$ que contém a tal que $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in U \cap S$.

Proposição 5. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, em que Ω é um aberto, uma função de classe C^1. Consideremos também $g : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função C^1 e $c \in \mathbb{R}$ um ponto da imagem de g tal que $S = g^{-1}(c)$ é uma superfície de nível. Se $a \in \Omega$ é um ponto de máximo ou mínimo de f em S, então*

1. $g(a) = c$.

2. Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.