**PROVA SUB - MATEMÁTICA 4 (CCM 0223)**

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

**Boa Prova!**

Exercício 1

(1,5 Ponto) a) Calcule $\int_C \frac{-y}{R^2x^2+y^2}dx + \frac{x}{R^2x^2+y^2}dy$, quando $C$ percorre a elipse $R^2x^2 + y^2 = R^2$ no sentido anti-horário em função da constante $R > 0$.

(1,5 Ponto) b) Use uma mudança de coordenadas adequada para calcular a integral dupla abaixo:

$$\int\int_S (x-y)^2 \, sen^2\,(x+y)\, dxdy,$$

em que $S$ é paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.

Exercício 2

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo limitado com fronteira de classe $C^1$.

(1 Ponto) a) Se $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ é uma função de classe $C^1$, calcule $\int\int_{\partial\Omega} \langle \nabla \times u, n\rangle \, dS$, em que $n$ é a normal que aponta para fora de $\Omega$.

(1 Ponto) b) Seja $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função dada por $r\,(x, y, z) = (x, y, z)$ e $n$ a normal que aponta para fora de $\Omega$. Mostre que existe $\lambda > 0$ tal que $\int\int_{\partial\Omega} r.ndS = \lambda vol(\Omega)$, em que $vol(\Omega)$ é o volume do aberto $\Omega$. Determine $\lambda$.

(1 Ponto) c) Seja $F\,(x, y, z) = (0, 0, x)$ e $S$ a superfície $z = y+5$ com $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$. Seja $n$ o vetor normal à superfície que aponta para baixo. Calcule $\int\int_S \nabla \times F.ndS$.

(1 Ponto) d) Calcule a área da superfície $z^2 = 2xy$ que fica entre $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 3$.

Exercício 3

Dois dados não viciados são jogados. A cada jogo podemos associar um par em $S = \{(a, b)\,; a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ que corresponde aos resultados do primeiro jogo (denotado por $a$) e do segundo jogo (denotado por $b$). Seja $X : S \to \mathbb{R}$ a variável aleatória dada por $X\,(a, b) = a + b$.

(2 pontos) a) Calcule $p_k = P\,(X = k)$ para todo $k \in \{0, 1, 2, ...\}$. Com estes resultados calcule a esperança $E\,(X)$ e esboce a função de distribuição $F_X$.

(1 ponto) b) Jogamos os dois dados $n$ vezes. Calcule a probabilidade de que, em pelo menos uma das jogadas, obtenhamos $(1, 1)$ (os dois dados caem com valor 1). Qual deve ser o menor valor de $n$ para que esta probabilidade seja maior do que $\frac{1}{2}$?

## Formulário.

**Definição 1.** Seja $f = (f_1, ..., f_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua e $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ derivável. Definimos a integral de linha por

$$\int f.d\alpha = \int f_1 dx_1 + ... + f_n dx_n = \int_a^b f(\alpha(t)).\alpha'(t)\, dt.$$

Seja $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos a integral pelo comprimento da curva por

$$\int g ds = \int_a^b g(\alpha(t)) \left\|\alpha'(t)\right\| dt.$$

**Definição 2.** Seja $Q \subset \mathbb{R}^n$ e $\varphi : Q \to \tilde{Q}$ um difeomorfismo. Seja $f : Q \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Logo

$$\int_Q f dx = \int_{\varphi^{-1}(Q)} f \circ \varphi \left|\det d\varphi\right| dx,$$

em que $\det(d\varphi) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\varphi x_j}\right)$.

**Definição 3.** Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização e $S = \varphi(\Omega)$. Nestas condições:

1) A área da superfície $S$ é definida como

$$\int\int_\Omega \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\| dudv.$$

2) A integral de superfície de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sobre $S$, em que $S \subset U$, é definida como

$$\int\int_S f dS = \int\int_\Omega f \circ \varphi(u, v) \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\| dudv.$$

3) O fluxo de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na direção $n$, em que $S \subset U$, é definido como $\int\int_S \langle f, n\rangle dS$. Portanto, é calculado pela expressão

$$\int\int_\Omega \left\langle f \circ \varphi(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\rangle dudv.$$

**Teorema 1.** *O teorema do divergente nos diz que se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado e conexo e se $\partial\Omega$ for suficientemente regular (de classe $C^1$, ou cubos, poliedros, semicírculos e etc) e se $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ é de classe $C^1$, então*

$$\int\int\int_\Omega \nabla.u dx = \int\int_{\partial\Omega} \langle u, n\rangle dS,$$

*em que $n$ é a normal unitária que aponta para fora de $\Omega$.*

**Teorema 2.** *O teorema de Stokes nos diz que se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de dimensão 2 com bordo suficientemente regular (por exemplos, curvas de classe $C^1$), e se $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ é uma função de classe $C^1$, em que $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $\Omega$ é um aberto, então*

$$\int\int_S \nabla \times u.ndS = \int_{\partial S} u.d\alpha,$$

*em que $\int_{\partial S} u.d\alpha$ é a integral de linha sobre o bordo da superfície e $n$ é uma normal unitária da superfície. A integração de linha obedece a regra da mão direita.*

**Definição 4.** Um espaço de probabilidade $(S, \mathcal{B}, P)$ consiste de

1) Um conjunto $S$.
2) Uma $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}$ de $S$. A $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ é uma coleção de subconjuntos de $S$ (chamados de eventos) que satisfaz:
a) $S$ e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{B}$.
b) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$, então $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{B}$.
c) Se $A \in \mathcal{B}$, então $A^c \in \mathcal{B}$.
3) Uma medida de probabilidade $P : \mathcal{B} \to [0, 1]$. A medida de probabilidade $P$ é uma função que satisfaz:
a) $P(S) = 1$ e $P(\emptyset) = 0$.
b) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ é uma coleção de conjuntos disjuntos, então $P(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty P(A_n)$.

No caso em que $S \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, costuma-se tomar como $\mathcal{B}$ a menor $\sigma$-álgebra que contém todos os abertos de $S$. Este conjunto é muito grande e contém também todos os fechados contidos em $S$.

**Definição 5.** Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que $X : S \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória se $X^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{B}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A função distribuição associada a $X$ é a função $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definida como $F_X(t) = P(X \leq t)$.

**Definição 6.** Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade e $X : S \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória. Se existe um conjunto enumerável $\{x_1, x_2, ...\}$ tal que $p_k = P(X = x_k) > 0$ e $\sum_{k=1}^\infty p_k = 1$, dizemos que $X$ tem distribuição contínua. Definimos a esperança de $X$ por $E(X) = \sum_{k=1}^\infty x_k p_k$.