RESULTADOS DADOS EM SALA DE AULA.

www.ime.usp.br/∼pplopes/verao.html

Sumário

1. Sistemas Lineares e Matrizes.

1.1. Sistemas Lineares.

Definition 1. Um **corpo** $\mathbb{F}$ é um conjunto em que duas operações estão definidas: uma chamada de multiplicação $. : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ e outra chamada de adição $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. Estas operações devem satisfazer:

(1) $+$ é comutativa $x + y = y + x$ para todos $x, y \in \mathbb{F}$.

(2) $+$ é associativa $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todos $x, y, z \in \mathbb{F}$.

(3) Existe um único elemento neutro $0 \in \mathbb{F}$, chamado de zero, tal que $x + 0 = 0$.

(4) A cada $x \in \mathbb{F}$, existe um único elemento $(-x)$ em $\mathbb{F}$ tal que $x + (-x) = 0$.

(5) . é comutativa $x.y = y.x$ para todos $x, y \in \mathbb{F}$.

(6) . é associativa $x.(y.z) = (x.y).z$ para todos $x, y, z \in \mathbb{F}$.

(7) Existe um único elemento diferente de zero e denotado por 1 que satisfaz $x.1 = x$ para todo $x \in \mathbb{F}$.

(8) Para todo $x \in \mathbb{F}$ diferente de zero, existe um único elemento, denotado por x^{-1}, que satisfaz $x^{-1}.x = 1$.

(9) Vale a propriedade distributiva, ou seja, $x.(y + z) = x.y + x.z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{F}$.

Os exemplos mais importantes são $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Neste curso $\mathbb{F}$ será sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definition 2. Sejam X e Y dois conjuntos. O conjunto $X \times Y$, chamado de **produto cartesiano** de X e Y, é o conjunto de todos os pares (x, y), em que $x \in X$ e $y \in Y$.

Definition 3. Quando tratamos com corpos, uma **operação em** $\mathbb{F}$ é uma função $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$.

Definition 4. Um **sistema linear** é um conjunto de equações da forma

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + ... + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases},$$

em que $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$ e $\beta_1,...,\beta_m \in \mathbb{F}$ são dados e $x_1,...,x_n$ são as **incógnitas**, cujos valores queremos determinar. Dizemos que o sistema linear é **homogêneo** se $\beta_1 = ... = \beta_m = 0$. O conjunto dos elementos $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{F}^n$ que resolvem o sistema é chamado de **conjunto solução do sistema**.

Definition 5. Dado um sistema com m equações e n incógnitas como o exibido acima, podemos classificá-lo em três tipos:

1) **Incompatível**: Se o sistema não tem solução.

2) **Compatível determinado**: Se o sistema tem uma única solução.

3) **Compatível indeterminado**: Se o sistema tem várias soluções.

Proposition 6. *Todo sistema homogêneo é compatível. (De fato $x_1 = ... = x_n = 0$ é sempre uma solução). Para sistemas homogêneos o conjunto solução, ou seja, o subconjunto de $\mathbb{F}^n$ dos elementos $(x_1, ..., x_n)$ que são soluções do sistema, forma um subespaço vetorial.*

Para sistemas compatíveis gerais temos o seguinte: Seja S o sistema abaixo

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + ... + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

e S_{hom} o sistema abaixo

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + ... + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Se $C \subset \mathbb{F}^n$ é o subespaço que é o conjunto das soluções do sistema homogêneo S_{hom} e $v = (x_1, ..., x_n)$ uma solução particular do sistema S, então o conjunto das soluções do sistema S é dado por

$$v + C,$$

ou seja, é o conjunto dos vetores de $\mathbb{F}^n$ dados por $v + u$, em que $u \in C$. Podemos interpretar as soluções de um sistema geral como uma translação das soluções do sistema homogêneo, ou seja, como o subespaço solução do sistema homogêneo, C, transladado por uma solução particular, v.

Definition 7. Podemos definir três operações elementares sobre os sistemas lineares. Estas operações são:

(I) Permutar duas equações do sistema.

(II) Multiplicar uma das equações do sistema por um $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$.

(III) Somar uma das equações do sistema por um múltiplo de outra linha.

Proposition 8. *Se um sistema S_1 é obtido de outro sistema S por uma operação elementar, então o sistema S pode ser obtido do sistema S_1 por uma operação elementar do mesmo tipo.*

Proposition 9. *Se um sistema S' é obtido de um sistema S através de um conjunto de operações elementares, então S' tem solução se, e somente se, S tem solução. Se os sistemas tiverem soluções, então elas são as mesmas. Se um sistema S' é obtido de um sistema S através de um conjunto de operações elementares dizemos que S_1* ***é equivalente e*** *S e denotamos $S_1 \sim S$. $\sim$ define uma relação de equivalência entre os sistemas, ou seja,*

1) $S \sim S$.

2) Se $S \sim S_1$, então $S_1 \sim S$.

3) Se $S \sim S_1$ e $S_1 \sim S_2$, então $S \sim S_2$.

Definition 10. Um sistema linear de m equações e n incógnitas é **escalonado** se ele for da forma

$$\begin{cases} \alpha_{1r_1}x_{r_1} + ... & & & +\alpha_{1n}x_n & = \beta_1 \\ & \alpha_{2r_2}x_{r_2} + ... & & +\alpha_{2n}x_n & = \beta_2 \\ & & .... & & \\ & & \alpha_{kr_k}x_{r_k} + ... & +\alpha_{kn}x_n & = \beta_k \\ & & & 0x_n & = \beta_{k+1} \end{cases},$$

com $\alpha_{jr_j} \neq 0$ para todo j e $1 \leq r_1 < r_2 ... < r_k \leq n$.

Proposition 11. *Todo sistema é equivalente a um sistema escalonado.*

Proposition 12. *Podemos saber se um sistema tem solução e quais são elas através do escalonamento. De fato temos três opções:*

(I) Em algum momento do processo de escalonamento chegamos a um sistema com uma equação do tipo

$$0x_1 + ... + 0x_n = \beta \ \ (\beta \neq 0).$$

Neste caso o sistema é incompatível, ou seja, não tem solução.

(II) Obtemos um sistema escalonado com n equações e n incógnitas da forma

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + & & +\alpha_{1n}x_n & = \beta_1 \\ & \alpha_{22}x_2 + & +\alpha_{2n}x_n & = \beta_2 \\ & \cdots\cdots & & \\ & & \alpha_{nn}x_n & = \beta_n \end{cases},$$

com $\alpha_{ii} \neq 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Neste caso o sistema é compatível determinado, ou seja, ele tem solução única. Uma forma de encontrar a solução é achando x_n pela última equação, depois substituí-lo na penúltima, achar x_{n-1} e continuar o procedimento até achar x_1. Outra forma é continuar o processo de escalonamento até achar um sistema da forma

$$\begin{cases} x_1 + & & & = \gamma_1 \\ & x_2 + & & = \gamma_2 \\ & \cdots\cdots & & \\ & & x_n & = \gamma_n \end{cases}.$$

(III) Obtemos um sistema escalonado da forma

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + & \ldots & & +\alpha_{1n}x_n & = \beta_1 \\ & \alpha_{2r_2}x_{r_2} + & \ldots & +\alpha_{2n}x_n & = \beta_2 \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & \alpha_{pr_p}x_p + \ldots & +\alpha_{pn}x_n & = \beta_p \end{cases},$$

com $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{jr_j} \neq 0$ para todo $j \in \{2, ..., p\}$ e $1 < r_2 < ... < r_p \leq n$.

Neste caso o sistema é compatível indeterminado, ou seja, tem várias soluções. Para achá-las basta continuar o escalonamento até chegar a um sistema da forma

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 & \ldots + 0 + \ldots & & +\alpha_{1n}x_n & = \beta_1 \\ & \alpha_{2r_2}x_{r_2} + & \ldots + 0 + \ldots & +\alpha_{2n}x_n & = \beta_2 \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & \alpha_{pr_p}x_{r_p} + \ldots & +\alpha_{pn}x_n & = \beta_p \end{cases},$$

ou seja, $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{jr_j} \neq 0$ para $j \in \{2, ..., p\}$ e os termos x_1 e x_{r_j} só aparecem na $j-$ésima linha. Neste caso as soluções são obtidas com x_1, x_{r_2}, ... e x_{r_p} em função de $\beta_1, ..., \beta_p$ e das outras incógnitas x_j para $j \notin \{1, r_2, ..., r_p\}$.

Corollary 13. *Se partirmos de um sistema com m equações e n incógnitas e fizermos escalonamento neste sistema, podemos obter 3 opções:*

(I) Em algum momento do escalonamento obtemos uma equação do tipo

$$0x_1 + ... + 0x_n = \beta, \ \beta \neq 0,$$

então o sistema é incompatível, ou seja, não tem solução.
Se o caso (I) não ocorre e ao final do escalonamento obtemos p equações então

(II) Se $p = n$, então o sistema é compatível determinado, ou seja, tem uma única solução.

(III) Se $p < n$, então o sistema é compatível indeterminado, ou seja, tem infinitas soluções.

1.2. **Matrizes.**

Definition 14. Uma **matriz** $m \times n$ com coeficientes em $\mathbb{F}$ é uma função $A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{F}$. Os elementos da imagem dessa função são chamados de termos da matriz A, ou seja, $A(i, j) = a_{ij}$ são os **termos** da matriz A. Uma matriz A também é denotada por $A = (a_{ij})$. Dado uma matriz cujos termos são a_{ij} podemos representá-la da seguinte forma.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dizemos que a matriz tem m linhas e n colunas. O conjunto das matrizes $m \times n$ é denotado por $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Se $m = n$, denotamos $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ apenas por $M_n(\mathbb{F})$.

Proposition 15. *Podemos definir operações com matrizes:*

(a) ***Adição*** $+ : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \times M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *é dada por* $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

(b) ***Multiplicação por um escalar*** $. \mathbb{F} \times M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *é dada por* $\lambda.(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$.

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(c) ***Multiplicação de matrizes*** $\cdot : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \times M_{n\times p}(\mathbb{F}) \to M_{m\times p}(\mathbb{F})$ *é dada por* $(a_{ij}).(b_{ij}) = (c_{ij})$, *em que* $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+...+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p}+...+a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11}+...+a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p}+...+a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}.$$

(d) ***Transposta de matrizes*** $^t : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{n\times m}(\mathbb{F})$ *é dada por* $(a_{ij})^t = (a_{ji})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(e) ***Adjunta de matrizes*** $* : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{n\times m}(\mathbb{F})$ *é dada por* $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}.$$

Remark 16. Se a_1,..., $a_n \in \mathbb{F}$, definimos a **somatória** por $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + ... + a_n$. Algumas propriedades da somatória:

(i) $\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$.

(iii) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.

Proposition 17. *O conjunto das matrizes* $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *forma um espaço vetorial com as operações* $+$, *soma, e* ., *produto por escalar. O elemento nulo é a* ***matriz nula***, 0, *cujos termos são todos zero. O oposto de* $A = (a_{ij})$ *é* $-A = (-a_{ij})$.

Definition 18. A **matriz identidade** de $M_n(\mathbb{F})$ é a matriz $n \times n$ dada por $I_n = (\delta_{ij})$, em que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j. \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

é chamado de **delta de Kronecker**.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 19. *As operações de matrizes satisfazem as seguintes propriedades para* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$, $B' \in M_{n\times p}(\mathbb{F})$ *e* $C \in M_{p\times l}(\mathbb{F})$.

(a) $A(BC) = (AB)C$.

(b) $(A + A')B = AB + A'B$ e $A(B + B') = AB + AB'$.

(c) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

(d) $(A + B)^t = A^t + B^t$ e $(A + B)^* = A^* + B^*$.

(e) $(AB)^t = B^t A^t$ e $(AB)^* = B^* A^*$.

(f) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ e $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

(g) $(A^t)^t = A$ e $(A^*)^* = A$.

Proposition 20. *A matriz identidade* $I \in M_n(\mathbb{F})$ *é a única matriz tal que para todo* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *satisfaz*

$$AI_n = I_n A = A.$$

Definition 21. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ é **inversível** se existe $B \in M_n(\mathbb{F})$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Neste caso B é denotado por A^{-1} e é chamado de **inversa** de A. A inversa de uma matriz é única.

Proposition 22. *Sejam* $A_1,\ldots, A_p \in M_n(\mathbb{F})$. *Então* $A_1,\ldots,A_p$ *são inversíveis se, e somente se,* $A_1A_2\ldots.A_p$ *é inversível. Se* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *e inversível, então* A^{-1} *também é inversível e* $(A^{-1})^{-1} = A$.

Proposition 23. *Uma matriz* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *é inversível se, e somente se, as linhas de* A *são linearmente independentes (L.I.). Isto ocorre se, e somente se, as colunas de* A *são linearmente independentes (L.I.).*

Definition 24. Podemos definir três operações elementares sobre as matrizes $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Estas operações são:

(I) Permutar duas linhas da matriz.

(II) Multiplicar uma das linhas da matriz por um $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$.

(III) Somar uma das linhas da matriz por um múltiplo de outra linha.

Proposition 25. *Sejam* $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ *as matrizes* $m \times n$. *Se uma matriz* B *é obtida de uma matriz* A *através de um conjunto de operações elementares dizemos que* B ***é equivalente a*** A *e denotamos* $B \sim A$. $\sim$ *define uma relação de equivalência entre as matrizes, ou seja,*

1) $A \sim B$.

2) Se $A \sim B$, então $B \sim A$.

3) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

Theorem 26. *Seja* $A \in M_n(\mathbb{F})$. A *é inversível se, e somente se,* $A \sim I_n$, *ou seja, a identidade pode ser obtida de* A *através de operações elementares. Neste caso a mesma sequência de operações elementares que leva* A *à* I_n, *também leva* I_n *à* A.

Corollary 27. *Sejam* A *e* B *duas matrizes em* $M_n(\mathbb{F})$ *tais que* $A \sim B$. *Se* B *não é inversível, então* A *também não é inversível.*

Para provar este teorema usamos as matrizes elementares.

Definition 28. Uma **matriz elementar** em $M_n(\mathbb{F})$ é uma matriz E obtida de I_n por meio de uma única operação elementar.

Proposition 29. *Toda matriz elementar* E *é inversível. Se uma matriz elementar* E *é obtida da identidade* I_n *através de uma operação elementar, então* EA *é obtido de* A *pela mesma operação elementar.*

1.3. **Usando matrizes para representar sistemas lineares.** Seja dado um sistema linear da forma

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}.$$

podemos representá-lo na forma de uma equação matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

Neste caso vemos que o método do escalonamento consiste em aplicar as mesmas operações elementares nas matrizes (α_{ij}) e (β_{ij}). No caso de equações com n incógnitas e n equações, temos o seguinte resultado

Proposition 30. *Seja*

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + ... + \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}$$

um sistema. Representando-o na forma de matrizes temos

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Este sistema é compatível determinado se, e somente se, a matriz (α_{ij}) for inversível. Neste caso $(x_i) = (\alpha_{ij})^{-1}(\beta_j)$. Se a matriz não for inversível, então o sistema ou não terá solução, ou terá infinitas soluções.

2. Espaços Vetoriais.

2.1. Espaços vetoriais e subespaços vetoriais.

Definition 31. Um **espaço vetorial** V sobre um corpo $\mathbb{F}$ consiste de:

1) Um conjunto V, cujos elementos são chamados vetores.

2) Um corpo $\mathbb{F}$, cujos elementos são chamados escalares.

3) Duas operações $+ : V \times V \to V$ e $. : \mathbb{F} \times V \to V$ que satisfazem as propriedades abaixo.

(A1) $+$ é comutativa: $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$.

(A2) $+$ é associativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$.

(A3) Existe em V um elemento neutro para a adição, ou seja, um elemento o tal que $u + o = u$, $\forall u \in V$.

(A4) Para todo elemento $u \in V$, existe um elemento denotado por $-u$ e chamado de oposto de u que satisfaz $u + (-u) = 0$.

(M1) $\alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$, para todo $u \in V$ e todos os α e β em $\mathbb{F}$.

(M2) $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$, para todo $u, v \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{F}$.

(M3) $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$, para todo $u \in V$ e todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

(M4) $1.u = u$, para todo $u \in V$.

Algumas propriedades dos espaços vetoriais:

(1) O vetor nulo é único, ou seja, existe um único vetor o tal que $u + o = u$ para todo $u \in V$.
(2) O vetor oposto é único, ou seja, dado $u \in V$, existe um único vetor $-u$ tal que $u + (-u) = o$.
(3) $\alpha.o = o$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$.
(4) $0.u = o$, para todo $u \in V$.
(5) $\alpha.u = o$ se, e somente se, $\alpha = 0$ ou $u = 0$.
(6) $-(-u) = u$ para todo $u \in V$.
(7) $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$.

Definition 32. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Um **subespaço vetorial** de V é um subconjunto $W \subset V$ tal que

(a) $o \in W$.

(b) Se $u \in W$ e $v \in W$, então $u + v \in W$.

(c) Se $\alpha \in \mathbb{F}$ e $u \in W$, então $\alpha.u \in W$.

Proposition 33. *Se U e W são subespaços vetoriais de V, então $U \cap W$ também é um subespaço vetorial de V. O conjunto $U + W = \{u + w | \, u \in U \, e \, w \in W\}$ também é um subespaço vetorial de V.*

Definition 34. Se U e W são subespaços vetoriais de V e $U \cap W = \{o\}$, então $U + W$ é chamado de **soma direta** de U com W. Denotamos por $U \oplus W$.

Proposition 35. *Se U e W são subespaços vetoriais de V. então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) Cada vetor $v \in V$ pode ser escrito de uma única maneira da forma $v = u + w$, em que $u \in U$ e $w \in W$.

b) $V = U + W$ e $U \cap W = \{o\}$, ou seja, $V = U \oplus W$.

Definition 36. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Dizemos que um vetor $v \in V$ é **combinação linear** dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n.$$

Definition 37. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $S = \{u_1, ..., u_n\}$ um subconjunto de V. Definimos o conjunto $[S]$, chamado de **subespaço gerado por** S, como o conjunto

$$[S] = \{\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n | \, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}\},$$

ou seja, o conjunto formado por todas as combinações lineares dos elementos de S.

Proposition 38. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e S um subconjunto de V. Então $[S]$ é o menor subespaço que contém S, ou seja, $[S]$ é um subespaço e se $S \subset W$ e W for um subespaço, então $[S] \subset W$.*

Definition 39. Um espaço vetorial V sobre $\mathbb{F}$ é um **espaço vetorial finitamente gerado** (também chamado de **espaço vetorial de dimensão finita**) se existir um conjunto $S \subset V$ finito tal que $V = [S]$.

2.2. Dependência e independência linear: Base e dimensão.

Definition 40. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Um conjunto $L = \{u_1, ..., u_n\} \subset V$ é **linearmente independente (L.I.)** se uma igualdade do tipo

$$\alpha_1.u_1 + ... + \alpha_n.u_n = 0, \, \alpha_i \in \mathbb{F}$$

só é válida se $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Dito de outra maneira

$$\alpha_1.u_1 + ... + \alpha_n.u_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0.$$

Definition 41. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Um conjunto $L = \{u_1, ..., u_n\} \subset V$ é **linearmente dependente (L.D.)** se não forem linearmente independentes. Ou seja, existe $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq (0, ..., 0)$ tal que

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n = 0.$$

Proposition 42. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Um conjunto $L = \{u_1, ..., u_n\} \subset V$ é linearmente independente (L.I.) se, e somente se, nenhum elemento de L pode ser escrito como combinação linear dos demais.*

Algumas propriedades da dependência e independência linear. Consideramos V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

(1) Se $L = \{u_1, ..., u_n\}$ contém o vetor nulo, então L é linearmente dependente (L.D.)
(2) Se $L = \{u_1, ..., u_n\} \subset V$ é linearmente dependente e $L \subset L' = \{u_1, ..., u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+m}\}$, então L' também é linearmente dependente.
(3) Se $L = \{u_1, ..., u_n, u_{n+1}, ..., u_{n+m}\} \subset V$ é linearmente independente e $L' = \{u_1, ..., u_n\} \subset L$, então L' também é linearmente independente.
(4) Se $L = \{u\}$, então L é linearmente independente se $u \neq o$ e é linearmente dependente se $u = o$.

Definition 43. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Uma **base** de V é um subconjunto finito $B = \{u_1, ..., u_n\} \subset V$ tal que

a) B gera V, ou seja, $[B] = V$ (todos os elementos de V são combinações lineares de elementos de B)

b) B é linearmente independente (L.I.)

Theorem 44. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Então existe uma base de V.*

Para provar esta proposição usamos os lemas abaixo.

Lemma 45. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, $S = \{u_1, ..., u_n\}$ um subconjunto L.I. de V e u um elemento qualquer de V. Se o conjunto $S \cup \{u\}$ é L.D., então $u \in [S]$. Isto equivale a: Se $u \notin [S]$ então $S \cup \{u\}$ é L.I.*

Lemma 46. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $S = \{u_1, ..., u_n\}$ um subconjunto de V . Se $u \in [S]$, então $[S] = [u_1, ..., u_n] = [u_1, ..., u_n, u]$.*

Theorem 47. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Toda base de V tem o mesmo número de elementos.*

Para provar esta proposição usamos o lema abaixo.

Lemma 48. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Se V é finitamente gerado por m elementos $V = [v_1, ..., v_m]$, então todo subconjunto L de V linearmente independente tem no máximo m elementos.*

Definition 49. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. O número de vetores contidos numa base de V (que é sempre o mesmo pelo teorema acima) é chamado de **dimensão** do espaço vetorial V.

Example 50. $\dim(\mathbb{F}^n) = n$, $\dim(P_n(\mathbb{F})) = n + 1$, $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{F})) = mn$, $\dim(\{o\}) = 0$, em que $P_n(\mathbb{F})$ são os polinômios de grau $\leq n$ com coeficientes em $\mathbb{F}$.

Corollary 51. *Seja V um espaço vetorial n dimensional sobre $\mathbb{F}$. Então:*

a) Todo conjunto de V que contém mais de n vetores é L.D.

b) Nenhum conjunto contendo menos de n vetores pode gerar V.

c) Se $B \subset V$ é um conjunto L.I. de n elementos, então B gera V e é uma base de V.

d) Se $B \subset V$ é um conjunto de n vetores que gera V, então B é L.I. e é uma base.

Theorem 52. *(Teorema do completamento) Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ sobre $\mathbb{F}$. Se $\{u_1, ..., u_r\} \subset V$ é um subconjunto L.I. com r vetores $r < n$, então existem $n - r$ vetores $u_{r+1}, ..., u_n$ de V de maneira que $B = \{u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$ é uma base de V.*

Proposition 53. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Todo subespaço W de V também é finitamente gerado e $dim(W) \leq dim(V)$. Além disso $dim(W) = dim(V)$ se, e somente se, $W = V$.*

Theorem 54. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Se U e W são subespaços de V, então*

$$dim(U \cap W) + dim(U + W) = dim(U) + dim(W).$$

2.3. **Coordenadas.**

Definition 55. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Uma **base ordenada** B de V é uma base $B = (u_1, ..., u_n)$ em que se fixou uma ordenação nos vetores. (Determinou-se qual é o primeiro, segundo... elemento da base). (Observação: Rigorosamente podemos definir uma base ordenada como uma bijeção de $\{1, ..., n\}$ em $\{u_1, ..., u_n\}$).

Proposition 56. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ e $B = (u_1, ..., u_n)$ uma base ordenada. Todo vetor $v \in V$ pode ser escrito de maneira única como*

$$v = \alpha_1.u_1 + ... + \alpha_n.u_n.$$

Definition 57. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ e $B = (u_1, ..., u_n)$ uma base ordenada. A cada elemento $v \in V$, podemos associar de maneira única uma n-upla $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{F}^n$ tal que $v = \alpha_1.u_1 + ... + \alpha_n.u_n$. Os elementos α_1,..., α_n são chamados de **coordenadas** de v na base B. A **matriz de coordenadas de** v **em relação a base** B, denotada por X_B, é a matriz em $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ dada por

$$X_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B .$$

Definition 58. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Consideremos duas bases ordenadas B e C do espaço vetorial V dadas por $B = (b_1, ..., b_n)$ e $C = (c_1, ..., c_n)$. Cada c_i pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos vetores de B. Assim

$$\begin{array}{c} c_1 = \alpha_{11}b_1 + ... + \alpha_{n1}b_n \\ \vdots \\ c_n = \alpha_{1n}b_1 + ... + \alpha_{nn}b_n \end{array}, \text{ ou simplesmente } c_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}b_i.$$

Em termos matriciais

$$(c_1...c_n) = (b_1...b_n)\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

A matriz $I_{CB} = (\alpha_{ij})$ é chamada de **matriz de mudança de base** B **para a base** C.

Proposition 59. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Consideremos em V três bases ordenadas: as bases $B = (b_1, ..., b_n)$, $C = (c_1, ..., c_n)$ e $D = (d_1, ..., d_n)$. Se I_{CB} é a matriz de mudança de base de B para C, I_{DC} é a matriz de mudança de base de C para D, então a matriz de mudança de base de B para D, I_{DB}, é a matriz $I_{DB} = I_{CB}I_{DC}$.*

Corollary 60. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Consideremos em V duas bases ordenadas B e C dadas por $B = (b_1, ..., b_n)$ e $C = (c_1, ..., c_n)$. A matriz de mudança de base B para a base C é inversível e $I_{CB}^{-1} = I_{BC}$.*

Proposition 61. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Consideremos em V duas bases ordenadas B e C. Se a matriz de coordenadas de um vetor $u \in V$ em relação a B é X_B e em relação a C é Y_C, então $X_B = I_{CB}Y_C$, ou de forma equivalente, $Y_C = I_{BC}X_B$.*

Proposition 62. *Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{F}$, B uma base ordenada de V e $P \in M_n(\mathbb{F})$ uma matriz inversível. Então existe uma única base ordenada B' de V tal que P é a matriz de mudança de base de B para B', ou seja, $P = I_{B'B}$.*

2.4. **Cálculos com subespaços.** Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ finitamente gerado e $B = (u_1, ..., u_n)$ uma base ordenada de V. Seja $W \subset V$ um subespaço gerado pelos vetores $W = [w_1, ..., w_m]$, que podem ser $L.I.$ ou $L.D.$.

Como B é uma base, os vetores de W podem ser escritos de maneira única como:

$$\begin{matrix} w_1 = \alpha_{11}u_1 + ... + \alpha_{n1}u_n = \alpha'_{11}u_1 + ... + \alpha'_{1n}u_n \\ \vdots \\ w_m = \alpha_{1m}u_1 + ... + \alpha_{nm}u_n = \alpha'_{m1}u_1 + ... + \alpha'_{mn}u_n \end{matrix}.$$

Notamos que $\alpha_{ij} = \alpha'_{ji}$, ou seja $(\alpha_{ij})^t = (\alpha'_{ij})$.

Proposition 63. *Um vetor $v \in V$, dado por $v = c_1u_1 + ... + c_nu_n$, pertence a W se, e somente se, existirem x_1,... ,$x_m \in \mathbb{F}$ tais que $x_1w_1 + ... + x_mw_m = v$. Isto ocorre se, e somente se, o sistema abaixo tem solução.*

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1m}x_m = c_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + ... + \alpha_{nm}x_m = c_n \end{cases}.$$

Proposition 64. *Para determinar uma base e a dimensão de W escrevemos a matriz*

$$\begin{pmatrix} \alpha'_{11} & \cdots & \alpha'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha'_{m1} & \cdots & \alpha'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Depois escalonamos esta matriz, ou seja, usando apenas operações elementares de matrizes, achamos uma matriz equivalente da forma

$$\begin{pmatrix} 0\cdots & \beta_{1r_1} & \cdots & & & & \beta_{1n} \\ 0 & 0\cdots & \beta_{2r_2} & & \cdots & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \beta_{pr_p} & \cdots & \beta_{pn} \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma base de W é dada por $B = \{w'_1, .., w'_p\}$, em que

$$\begin{matrix} w'_1 = \beta_{1r_1}u_{r_1} + ... + \beta_{1n}u_n \\ \vdots \\ w'_p = \beta_{pr_p}u_{r_p} + ... + \beta_{pn}u_n \end{matrix}.$$

A dimensão de W é p.

3. Transformações Lineares.

3.1. Recordações sobre funções.

Definition 65. Seja U e V dois conjuntos e $f : U \to V$ uma função. O conjunto U é chamado de **domínio** da função f. O conjunto V é chamado de **contradomínio** da função f. O conjunto $Im(f) = \{f(x)|x \in U\}$ é chamado de **imagem** da função f. Se $W \subset U$ é um subconjunto de U então $f(W) = \{f(x)|x \in W\}$ é chamado de **imagem do conjunto** W.

Definition 66. Sejam U e V dois conjuntos e $f : U \to V$ uma função. A função é

1) **Injetora** se satisfaz a propriedade "Se u_1 e u_2 são dois vetores em U tais que $f(u_1) = f(u_2)$, então $u_1 = u_2$" ou de forma equivalente "Se u_1 e u_2 são dois vetores distintos em U, $u_1 \neq u_2$, então $f(u_1) \neq f(u_2)$.

2) **Sobrejetora** se $Im(f) = V$.

3) **Bijetora** se for injetora e sobrejetora.

Definition 67. Sejam U, V e W três conjuntos. Dadas duas funções $f : U \to V$ e $g : V \to W$, podemos definir a **composta de** g **com** f, chamada de g bola f e denotada por $g \circ f$, como a função definida por

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Proposition 68. *Sejam U e V dois conjuntos. Se $f : U \to V$ é uma função bijetora, então existe uma única função $g : V \to U$, também denotada por f^{-1}, tal que $g \circ f(u) = u$ para todo $u \in U$ e $f \circ g(v) = v$ para todo $v \in V$.*

Proposition 69. *Sejam U e V dois conjuntos. Se existir uma função $g : V \to U$ tal que*

a) $f \circ g(v) = v$ para todo $v \in V$, então f é sobrejetora.

b) $g \circ f(u) = u$ para todo $u \in V$, então f é injetora.

c) Se g satisfizer as duas condições acima, então f e g são bijetoras.

3.2. Transformações lineares e principais propriedades.

Definition 70. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Uma função $F : U \to V$ é chamada de **transformação linear** de U em V se satisfizer:

a) $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$, para todo u_1, $u_2 \in U$.

b) $F(\lambda u) = \lambda F(u)$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ e $u \in U$.

Algumas propriedades das transformações lineares. Consideramos U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear.

(1) $F(o) = o$, ou seja, F leva vetor nulo em vetor nulo.
(2) $F(-u) = -F(u)$ para todo $u \in U$.
(3) $F(u_1 - u_2) = F(u_1) - F(u_2)$.
(4) Se W é um subespaço de U, então a imagem de W por F, $F(W)$, é um subespaço de V.

Proposition 71. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$, U finitamente gerado e $F : U \to V$ uma transformação linear. Se $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de U, então F está unicamente determinado pelos valores que assume nesta base. Ou seja, se $G : U \to V$ é uma outra transformação linear e $F(u_j) = G(u_j)$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$, então $F = G$.*

Proposition 72. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$, U finitamente gerado e $B = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base de U. Dado um conjunto de vetores arbitrários em V, $\{v_1, ..., v_n\}$, existe uma única transformação linear $F : U \to V$ tal que*

$$F(u_j) = v_j \text{ para todo } j \in \{1, ..., n\}.$$

Definition 73. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. O **núcleo de** F, também chamado de **Kernel de** F, é o conjunto

$$Ker(F) = \{u \in U|\, F(u) = o\}.$$

Proposition 74. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Então $Ker(F)$ é um subespaço vetorial de U. Se U for finitamente gerado, então $Ker(F)$ também é. Sua dimensão é chamada de **nulidade da transformação** F.*

Proposition 75. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Então F é injetora se, e somente se, $Ker(F) = \{o\}$.*

Corollary 76. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Então F é injetora se, e somente se, $F(u) = 0$ só ocorrer se $u = 0$. Isto é um critério muito útil para se verificar injetividade.*

Theorem 77. *(Teorema do Núcleo e da Imagem) Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$, U finitamente gerado, e $F : U \to V$ uma transformação linear, então*

$$\dim(U) = \dim(Ker(F)) + \dim(Im(F)).$$

Corollary 78. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$, finitamente gerados e de mesma dimensão. Seja $F : U \to V$ uma transformação linear. Então as seguintes afirmações abaixo são equivalentes:*

(I) F é sobrejetora.

(II) F é bijetora.

(III) F é injetora.

(IV) F leva bases de U em bases de V.

3.3. **Isomorfismos e automorfismos.**

Definition 79. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Dizemos que F é um **isomorfismo** se F for bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora.

Proposition 80. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Se F for um isomorfismo, então $F^{-1} : V \to U$ também é um isomorfismo.*

Definition 81. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Dizemos que eles são **isomorfos** se existir uma transformação linear bijetora $F : U \to V$, ou seja, se existir um isomorfismo $F : U \to V$.

Definition 82. Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to U$ uma transformação linear. Dizemos que F é um **automorfismo** se F for bijetora, ou seja, se F for um isomorfismo.

Theorem 83. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ finitamente gerados. Então U é isomorfo a V se, e somente se, $\dim(U) = \dim(V)$.*

Corollary 84. *Todo espaço vetorial de dimensão finita é isomorfo a $\mathbb{F}^n$ para algum $n \in \{0, 1, 2, ...\}$. Note que por convenção $\mathbb{F}^0 = \{o\}$, ou seja, o espaço vetorial que só contém o vetor nulo.*

3.4. **A álgebra das transformações lineares e sua representação matricial.**

Definition 85. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Denotamos por $L(U, V)$ o conjunto das transformações lineares de U em V. Se $U = V$, então denotamos $L(U, V)$ simplesmente por $L(U)$.

Definition 86. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Se $F, G \in L(U, V)$, então definimos $F + G : U \to V$ a função dada por

$$(F + G)(u) = F(u) + G(u).$$

Definimos a função $\lambda F : U \to V$ como a função

$$(\lambda F)(u) = \lambda F(u).$$

Proposition 87. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Se $F, G \in L(U, V)$, então $F + G \in L(U, V)$ e $\lambda F \in L(U, V)$.*

Proposition 88. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Então as operações $+ : L(U, V) \times L(U, V) \to L(U, V)$ e $. : \mathbb{F} \times L(U, V) \to L(U, V)$ definidas anteriormente tornam $L(U, V)$ um espaço vetorial. O elemento neutro é a transformação linear nula. Ela leva todos os elementos de U no vetor nulo.*

Proposition 89. *Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Se $F \in L(U, V)$ e $G \in L(V, W)$, então*

$$G \circ F \in L(U, W),$$

ou seja, a composição de transformações lineares também é uma transformação linear.

Proposition 90. *Sejam U, V, W e Z espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Então*

(I) Se $F \in L(U, V)$, $G \in L(V, W)$ e $H \in L(W, Z)$, então $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$.

(II) Se $I_V \in L(V)$ é a identidade em V ($I_V(v) = v$ para todo $v \in V$) e $I_U \in L(U)$ é a identidade em U ($I_U(u) = u$), então para qualquer $F \in L(U, V)$ temos que $F \circ I_U = F$ e $I_V \circ F = F$.

(III) Se $F, G \in L(U,V)$ e $H \in L(V,W)$, então $H \circ (F+G) = H \circ F + H \circ G$. Se $G \in L(U,V)$ e $F, H \in L(V,W)$, então $(F+H) \circ G = F \circ G + H \circ G$.

(IV) Se $F \in L(U,V)$ e $G \in L(V,W)$, então $\lambda(G \circ F) = (\lambda G) \circ F = G \circ (\lambda F)$.

Corollary 91. *Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Logo a composição define uma operação $\circ : L(U) \times L(U) \to L(U)$. Assim $L(U)$ é um espaço vetorial em que uma terceira operação $\circ$ está definida satisfazendo:*

1) $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$.

2) $\lambda(A \circ B) = (\lambda A) \circ B = A \circ (\lambda B)$.

3) $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$ e $(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C$.

4) $I \circ A = A \circ I = A$, em que I é a transformação identidade de U.

Qualquer espaço vetorial que tem uma terceira operação que satisfaz estas propriedades é chamado de ***álgebra (ou álgebra linear) com unidade****.*

Definition 92. Sejam U e V espaços vetoriais finitamente gerados sobre $\mathbb{F}$ de dimensões n e m, respectivamente. Dadas uma base ordenada $B = (u_1, ..., u_n)$ do espaço vetorial U, uma base ordenada $C = (v_1, ..., v_m)$ do espaço vetorial V e uma transformação linear $F : U \to V$. Sabemos que F está completamente determinada pelos valores que assume na base B. Como $F(u_j) \in V$, então cada $F(u_j)$ pode ser escrito de maneira única pelos elementos de C. Assim

$$\begin{array}{c} F(u_1) = \alpha_{11}v_1 + ... + \alpha_{m1}v_m \\ \vdots \\ F(u_n) = \alpha_{1n}v_1 + ... + \alpha_{mn}v_m \end{array} \quad \text{, ou simplesmente } F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i.$$

Em termos matriciais

$$(F(u_1)...F(u_n)) = (v_1...v_m) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

A matriz $F_{BC} = (\alpha_{ij})$ é chamada de **matriz de F em relação às bases** B **e** C. Se $U = V$ e $B = C$ também usamos a notação $F_B = F_{BB}$.

Proposition 93. *Sejam U e V espaços vetoriais finitamente gerados sobre $\mathbb{F}$ de dimensões n e m, respectivamente. Dadas uma base ordenada $B = (u_1, ..., u_n)$ do espaço vetorial U, uma base ordenada $C = (v_1, ..., v_m)$ do espaço vetorial V e uma transformação linear $F : U \to V$, então a aplicação $R : L(U,V) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ que associa a cada transformação $F \in L(U,V)$ a sua representação matricial é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(U,V)$ e $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Em particular* $\dim(L(U,V)) = mn$.

Corollary 94. *Sejam U um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ de dimensão n e B uma base ordenada de V, então $R : L(U) \to M_n(\mathbb{F})$ é um isomorfismo.*

Proposition 95. *Sejam U e V espaços vetoriais finitamente gerados sobre $\mathbb{F}$, $B = (u_1, ..., u_n)$ uma base ordenada de U e $C = (v_1, ..., v_m)$ uma base ordenada de V. Consideramos $F : U \to V$ uma transformação linear, cuja matriz em relação a B e C é F_{BC}. Se $u \in U$ tem matriz de coordenadas X_B em relação a base B, então $F(u)$ tem matriz de coordenadas $Y_C = F_{BC}X_B$ em relação a base C.*

Proposition 96. *Sejam U e V espaços vetoriais finitamente gerados sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Dadas duas bases ordenadas B e B' de U e duas C e C' de V. então*

$$F_{B'C'} = I_{CC'}F_{BC}I_{B'B},$$

em que estamos usando a notação usual: $I_{B'B}$ é a matriz de mudança de base B para B', $I_{CC'}$ é a matriz de mudança de base C' para C, F_{BC} é a matriz que representa a transformação F nas bases B e C, $F_{B'C'}$ é a matriz que representa a transformação F nas bases B' e C'.

Corollary 97. *Seja U um espaço vetorial finitamente gerados sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Dadas duas bases ordenadas B e B' de U, então*

$$F_{B'} = I_{BB'}F_BI_{B'B},$$

em que estamos usando a notação usual: $I_{B'B}$ é a matriz de mudança de base B para B', $I_{BB'}$ é a matriz de mudança de base B' para B, F_B é a matriz que representa a transformação F na base B , $F_{B'}$ é a matriz que representa a transformação F na base B'.

Definition 98. Sejam A e $B \in M_n(\mathbb{F})$. Dizemos que A e B são **matrizes semelhantes** se existe $M \in M_n(\mathbb{F})$, inversível tal que

$$A = M^{-1}BM.$$

Usamos a notação $A \approx B$.

Proposition 99. *A semelhança é uma relação de equivalência em $M_n(\mathbb{F})$, isto é:*

1) $A \approx A$.

2) Se $A \approx B$, então $B \approx A$.

3) Se $A \approx B$ e $B \approx C$, então $A \approx C$.

Proposition 100. *Seja U um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ e B uma base de U. Dado $F : U \to U$ uma transformação linear e F_B sua representação na base B. Então se F_B é semelhante a uma matriz A, então $A = F_{B'}$ para alguma base B' de U.*

Proposition 101. *Sejam U, V e W espaços vetoriais finitamente gerados sobre $\mathbb{F}$. Sejam dadas bases ordenadas $B = (u_1, ..., u_n)$ de U, $C = (v_1, ..., v_m)$ de V e $D = (w_1, ..., w_p)$ de W. Se $F \in L(U, V)$ é uma transformação linear com matriz F_{BC} na base B e C e $G \in L(V, W)$ é uma transformação linear com matriz G_{CD} na base C e D, então $G \circ F$ é uma transformação linear, cuja matriz nas bases B e D é dada por*

$$(G \circ F)_{BD} = G_{CD}F_{BC}.$$

Corollary 102. *Sejam U e V espaços vetoriais finitamente gerados sobre $\mathbb{F}$ e B e C duas bases ordenadas de U e V, respectivamente. Se $F : U \to V$ é um isomorfismo, então a sua matriz F_{BC} nas bases B e C tem inversa. Sua inversa é $(F_{BC})^{-1} = \left(F^{-1}\right)_{CB}$, em que $\left(F^{-1}\right)_{CB}$ é a matriz de F^{-1} nas bases C e B.*

Proposition 103. *Sejam U e V espaços vetoriais finitamente gerados sobre $\mathbb{F}$ e $F : U \to V$ uma transformação linear. Dadas bases B de U e C de V, então se F_{BC} é inversível, podemos concluír que* $\dim(U) = \dim(V)$ *e F é um isomorfismo.*

Corollary 104. *Seja U um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ e B uma base ordenada de U. Assim a função $R : L(U) \to M_n(\mathbb{F})$ que associa a cada transformação linear à sua representação matricial em relação a B é um isomorfismo de álgebras, ou seja, é um isomorfismo de espaços vetoriais e além disto satisfaz $R(F \circ G) = R(F)R(G)$ e $R(I) = I_n$.*

3.5. **Espaço dual.**

Definition 105. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Chamamos as transformações lineares $F : V \to \mathbb{F}$, em que estamos considerando $\mathbb{F}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, de **funcionais lineares**. O espaço de todos os funcionais lineares de um espaço vetorial V, ou seja, $L(V, \mathbb{F})$, é chamado de **espaço dual de** V e também é denotado por V^*.

Proposition 106. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Se $B = (u_1, ..., u_n)$ é uma base ordenada de V, então existe uma única base $B^* = (f_1, ..., f_n)$ de $L(V, \mathbb{F}) = V^*$ tal que*

$$f_i(u_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}.$$

*Esta base é chamada de **base dual de** B. Para a base dual usamos a notação B^*.*

Proposition 107. *Seja V um espaço vetorial, $B = (u_1, ..., u_n)$ uma base ordenada de V e $B^* = (f_1, ..., f_n)$ sua base dual. Se $F \in V^*$ é um funcional linear qualquer, então*

$$F = F(u_1)f_1 + ...F(u_n)f_n.$$

Assim suas coordenadas na base dual são $(F(u_1), ..., F(u_n))$.