RESULTADOS DADOS EM SALA DE AULA.

www.ime.usp.br/∼pplopes/verao.html
Como sempre $\mathbb{F}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Se $z \in \mathbb{C}$, então $\overline{z}$ denota o complexo conjugado de z. Se $z \in \mathbb{R}$, então $\overline{z} = z$.

Sumário

1. Espaços com Produto Interno.

1.1. Produtos internos e normas.

Definition 1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Um produto interno sobre V é uma função $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ para todos os u, v e w pertencentes a V.

(2) $\langle \lambda u, w\rangle = \overline{\lambda}\,\langle u, w\rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}, u, w \in \mathbb{F}$.

(3) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, $\forall u, v \in V$.

(4) $\langle u, u\rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle u, u\rangle > 0$ se $u \neq o$.

Notemos que se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, então a propriedade (3) fica $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

Example 2. (1) Em $\mathbb{F}^n$ o produto interno usual é

$$\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)\rangle = x_1\overline{y_1} + ...x_n\overline{y_n} = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}.$$

(2) Seja $C(U, \mathbb{F})$ o conjunto das funções contínuas $f : U \to \mathbb{F}$, em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto. O produto interno usual é

$$\langle f, g\rangle = \int_U f(t)\overline{g(t)}dt.$$

(3) Seja $P_n(\mathbb{F})$ o conjunto dos polinômios em $\mathbb{F}$ de grau menor ou igual a n. Um exemplo de produto interno é

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt,$$

em que $a < t < b$ e a e b são números reais.

(3) Em $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ o produto interno usual é

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\overline{B_{ij}} = Tr(AB^*),$$

em que $(B^*)_{ij} = \overline{B_{ji}}$ e $Tr : M_m(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ é o funcional linear dado por $Tr(A) = \sum_{i=1}^{m} A_{ii}$. Ele é chamado de traço.

Proposition 3. *Todo espaço vetorial V finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ admite um produto interno. De fato, se $B = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de V, então um produto interno de V é dado por*

$$\langle \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n, \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n\rangle = \alpha_1\overline{\beta_1} + ... + \alpha_n\overline{\beta_n}.$$

Proposition 4. *O produto interno satisfaz as seguintes propriedades:*

1) $\langle o,u\rangle = \langle u,o\rangle = 0$, para todo $u \in V$. o denota o elemento neutro.

2) $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\,\langle u,v\rangle$ $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $u, v \in V$.

3) $\langle u, v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$ $\forall u,v,w \in V$.

Corollary 5. *O produto interno pode ser definido como uma função $\langle .,.\rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ tal que*

(1) É linear do lado esquerdo $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\,\langle u,w\rangle + \beta\,\langle v,w\rangle$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}$ e $\forall u,v,w \in V$.

(2) É anti-linear do lado direito $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \overline{\alpha}\,\langle u,v\rangle + \overline{\beta}\,\langle u,w\rangle$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}$ e $\forall u,v,w \in V$.

(3) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$, $\forall u,v \in V$.

(4) $\langle u,u\rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle u,u\rangle > 0$ se $u \neq o$.

No caso em que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, o produto interno é linear do lado direito.

Proposition 6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se $B = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de V, então um produto interno de V é completamente determinado pelos seus valores na base B. Isto é, se $\langle .,.\rangle_1$ e $\langle .,.\rangle_2$ são dois produtos internos tais que $\langle v_i, v_j\rangle_1 = \langle v_i, v_j\rangle_2$ $\forall i,j$, então os dois produtos internos são iguais.*

Remark 7. A matriz $A = (\langle v_i, v_j\rangle)_{ij}$ é auto-adjunta, pois $A_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle = \overline{\langle v_j, v_i\rangle} = \overline{A_{ji}} = A^*_{ij}$.

Definition 8. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Uma norma em V é uma função $\|.\| : V \to [0,\infty[$ que satisfaz

1) $\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = o$.

2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ e $\forall u \in V$.

3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u,v \in V$.

Um espaço vetorial V com uma norma $\|.\|$ é chamado de espaço normado.

Proposition 9. *Seja V um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F}$. Então a seguinte desigualdade vale*

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|, \forall u,v \in V,$$

em que $\|.\|$ é a norma em relação ao produto interno.

Definition 10. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. A norma $\|.\|$ em relação ao produto interno é a função $\|.\| : V \to [0,\infty[$ dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}.$$

Proposition 11. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Se V é um espaço vetorial com produto interno, então:*

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|, \forall u,v \in V.$$

Proposition 12. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. A norma $\|.\|$ em relação ao produto interno $\langle .,.\rangle$ é de fato uma norma. Ou seja, satisfaz:*

1) $\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = o$.

2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ e $\forall u \in V$.

3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u,v \in V$.

Example 13. Alguns exemplos de normas em relação a produtos internos são

1) Em $\mathbb{F}^n$:

$$\|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}.$$

2) Em $C(U, \mathbb{F})$, funções contínuas $f : U \to \mathbb{F}$, em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto:

$$\|f\| = \left(\int_U |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3) Em $P_n(\mathbb{F})$:

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4) Em $M_{m\times n}(\mathbb{F})$:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |A_{ij}|^2} = \sqrt{Tr(A^*A)}.$$

Alguns exemplos de normas que não vêm necessariamente de produtos internos são

1) Em $\mathbb{F}^n$:

$$\|(x_1, ..., x_n)\| = |x_1| + ... + |x_n|.$$
$$\|(x_1, ..., x_n)\| = \max_{i\in\{1,...,n\}} \{|x_i|\}.$$
$$\|(x_1, ..., x_n)\| = (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}},$$

em que $1 \leq p < \infty$.

2) Em $C(U, \mathbb{F})$, funções contínuas $f : U \to \mathbb{F}$, em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto:

$$\|f\| = \int_U |f(x)| dx.$$
$$\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in U\}.$$
$$\|f\| = \left(\int_U |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definition 14. A norma de um espaço vetorial V define uma distância em V, $d : V \times V \to [0, \infty[$, ou melhor, uma métrica dada por

$$d(u, v) = \|u - v\|, \forall u, v \in V.$$

O espaço vetorial V com a métrica d se torna um espaço métrico. As propriedades da métrica são:

(I) $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, v) = 0$ se, e somente se, $u = v$.

(II) $d(u, v) = d(v, u)$.

(III) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, $\forall u, v, w \in V$.

Proposition 15. *Seja V um espaço vetorial, $\langle ., .\rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ um produto interno e $\|.\| : V \to [0, \infty[$ uma norma que vem deste produto interno. Então*

$$|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\| \iff \{u, v\} \text{ é um conjunto L.D..}$$

Proposition 16. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e $\|.\|$ uma norma que vem deste produto interno. Então vale a regra do paralelogramo:*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Corollary 17. *Nem todas as normas vêm de um produto interno. Basta verificar que algumas normas dos exemplos dados não satisfazem a regra do paralelogramo.*

Proposition 18. *Seja V um espaço vetorial com produto interno sobre $\mathbb{F}$. Se $\|.\|$ é uma norma que vem do produto interno, então o produto interno pode ser escrito em termos de sua norma.*

Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, então

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, então

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

Corollary 19. *Se $\|.\| : V \to [0, \infty[$ é uma norma que vem de um produto interno $\langle ., .\rangle$, então o produto interno $\langle ., .\rangle$ está completamente determinado por $\|.\|$. Logo $\|.\|$ não pode vir de 2 produtos internos distintos.*

Definition 20. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno. Definimos o ângulo entre os vetores $u, v \in V$ como o único número entre 0 e π que satisfaz

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

1.2. **Ortogonalidade e ortonormalidade.**

Definition 21. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Dizemos que dois vetores u e $v \in V$ são ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$. Usamos a notação $u \perp v$ para dizer que os dois vetores são ortogonais. Um conjunto $S \subset V$ é ortogonal se todos os elementos de S são ortogonais entre si. Dizemos que um conjunto S é ortonormal se todos os elementos de S são ortogonais entre si e têm norma 1. Assim $S = \{u_1, ..., u_n\}$ é ortogonal se $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ para $i \neq j$ e é ortonormal se $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$.

Proposition 22. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno. Dois vetores u e v são ortogonais se um dos dois for igual à zero ou se ambos são diferentes de zero e formam um ângulo de $\frac{\pi}{2}$.*

Proposition 23. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Todo conjunto ortogonal $S = \{g_1, g_2, ..., g_r\} \subset V$ composto de vetores não nulos é linearmente independente (L.I.). Em particular todo conjunto ortonormal é L.I..*

Corollary 24. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão n com produto interno. Se $S \subset V$ é um conjunto ortonormal, então S tem no máximo n elementos.*

Definition 25. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Uma base ortonormal B de V é um conjunto B de V que é uma base e é um conjunto ortonormal.

Lemma 26. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $S = [v_1, ..., v_r]$ um subconjunto arbitrário de V. Seja $v \in V$ um vetor qualquer. Então v é ortogonal a todo vetor de $[S] = [v_1, ...v_r]$ se, e somente se, v é ortogonal a todo vetor v_i, $i = 1, ..., r$.*

Lemma 27. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $S = \{g_1, ..., g_r\} \subset V$ um conjunto ortonormal de V. Se $u \in V$, então*

$$u - \langle u, g_1\rangle g_1 - ... - \langle u, g_r\rangle g_r$$

é ortogonal a todo vetor de $[S]$.

Theorem 28. *(Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt). Todo espaço vetorial com produto interno sobre $\mathbb{F}$ de dimensão n, com $n > 1$, admite uma base ortonormal.*

O método de ortonormalização: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Para achar uma base $B = \{b_1, ..., b_n\}$ ortonormal devo:

(1) Achar b_1 por
$$b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

(2) Achar b_2 por
$$b_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, b_1\rangle b_1}{\|v_2 - \langle v_2, b_1\rangle b_1\|}.$$

(3) Repetir o processo n vezes, achando cada b_j pela fórmula abaixo:
$$b_j = \frac{v_j - \langle v_j, b_1\rangle b_1 - ... - \langle v_j, b_{j-1}\rangle b_{j-1}}{\|v_j - \langle v_j, b_1\rangle b_1 - ... - \langle v_j, b_{j-1}\rangle b_{j-1}\|}.$$

Corollary 29. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão $n \neq 0$. Se $\langle .,. \rangle$ é um produto interno de V, então existe $B = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V tal que*

$$\langle \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n, \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n \rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} + ... + \alpha_n \overline{\beta_n}.$$

De fato B é qualquer base ortonormal de V.

Proposition 30. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $B = (v_1, ..., v_n)$ uma base ortonormal ordenada de V. Se $v \in V$, então v pode ser escrito como*

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + ... + \langle v, v_n \rangle v_n.$$

Assim as coordenadas de v na base B são $(\langle v, v_1 \rangle, ..., \langle v, v_n \rangle)$.

Proposition 31. *Seja V um espaço vetorial e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de V. Assim se $v \in V$, então*

$$\|v\| = \sqrt{|\langle v, v_1 \rangle|^2 + ... + |\langle v, v_n \rangle|^2}.$$

Esta é a chamada identidade de Parseval.

Definition 32. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Seja $U \subset V$ um subespaço vetorial de V. O complemento ortogonal de U, denotado por $U^\perp$, é o conjunto

$$U^\perp = \{v \in V; \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in U\}.$$

Proposition 33. *Seja V um espaço vetorial de $\mathbb{F}$ com produto interno. Se U é um subespaço, então o seu complemento ortogonal $U^\perp$ também é um subespaço de V.*

Proposition 34. *Seja V um espaço vetorial com produto interno finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Se $U \subset V$ é um subespaço vetorial de V, então $V = U \oplus U^\perp$, ou seja, $V = U + U^\perp$ e $U \cap U^\perp = \{o\}$.*

Corollary 35. *Se V é um espaço vetorial finitamente gerado com produto interno e $U \subset V$ é um subespaço vetorial, então $\left(U^\perp\right)^\perp = U$.*

Proposition 36. *(Teorema do completamento para bases ortonormais) Seja V um espaço vetorial com produto interno de dimensão $n \geq 1$. Se $\{u_1, ..., u_r\} \subset V$ é um subconjunto ortonormal de V com r vetores e $r < n$, então existem $n - r$ vetores $u_{r+1}, ..., u_n \in V$ tais que $B = \{u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$ é uma base ortonormal de V.*

Definition 37. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $U \subset V$ um subespaço de V. Se $B = \{g_1, ..., g_r\}$ é uma base ortonormal de U, então definimos um operador linear $E : V \to V$ pela fórmula

$$E(v) = \langle v, g_1 \rangle g_1 + ... + \langle v, g_r \rangle g_r.$$

E é chamado de projeção ortogonal e o vetor $E(v)$ é chamado de projeção ortogonal de v sobre o subespaço U.

Proposition 38. *Seja V um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita e $U \subset V$ um subespaço de V. A projeção ortogonal sobre o subespaço U satisfaz $E^2 = E$ e $E^* = E$. Além disso, E independe da base ortonormal utilizada para defini-la. As seguintes propriedades valem:*
P1) $Im(E) = U$.
P2) $Ker(E) = U^\perp$.
P3) $E|_U = I|_U$.
P4) $E|_{U^\perp} = 0|_{U^\perp}$.
P5) Seja $v \in V$, então v pode ser escrito de maneira única como $v = u + u^\perp$, com $u \in U$ e $u \in U^\perp$, pois $V = U \oplus U^\perp$. Assim

$$E(v) = E(u + u^\perp) = u.$$

1.3. **Isometrias.**

Proposition 39. *Sejam V e W espaços vetoriais com produto interno sobre $\mathbb{F}$ finitamente gerados. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se V e W possuem produtos internos $\langle .,. \rangle_1$ e $\langle .,. \rangle_2$, cujas normas são $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\|T(u)\|_2 \leq C \|u\|_1.$$

Remark 40. Para quem estiver estudando espaços métricos, a desigualdade acima nos diz que $T : V \to W$ é contínua nas métricas dadas pelas normas $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$.

Proposition 41. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ finitamente gerados, de mesma dimensão e com produto interno. Logo uma transformação linear $T : V \to W$ é um isomorfismo se, e somente se, existir constantes C e $C' > 0$ tais que*

$$C'\|u\|_1 \leq \|T(u)\|_2 \leq C\|u\|_1,$$

em que $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ são as normas que vêm dos produtos internos de V e W, respectivamente.

Definition 42. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $T : V \to V$ uma transformação linear. Dizemos que $T : V \to V$ é uma isometria se

$$\|T(u)\| = \|u\|, \forall u \in V,$$

em que $\|.\|$ é a norma vinda do produto interno.

Proposition 43. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $T : V \to V$ uma isometria. Logo T é um isomorfismo.*

Proposition 44. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $T : V \to V$ uma transformação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T é uma isometria.

(ii) $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ $\forall u, v \in V$.

(iii) T leva bases ortonormais em bases ortonormais.

Definition 45. Uma matriz $T \in M_n(\mathbb{F})$ é ortogonal se $T^tT = TT^t = I_n$, em que $T^t_{ij} = T_{ji}$ é a matriz transposta. Uma matriz $T \in M_n(\mathbb{C})$ é unitária se $T^*T = TT^* = I_n$, em que $T^*_{ij} = \overline{T_{ji}}$.

Proposition 46. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $T : V \to V$ uma transformação linear. Para qualquer $B = \{g_1, ..., g_n\}$ base ortonormal temos que T é isometria se, e somente se, T_B é uma matriz ortogonal (se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ou unitária (se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).*

Proposition 47. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Logo A é uma matriz ortogonal se, e somente se, suas linhas são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^n$. Isso ocorre se, e somente se, as colunas são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^n$.*

Da mesma forma, seja $A \in M_n(\mathbb{C})$. Logo A é uma matriz unitária se, e somente se, suas linhas são vetores ortonormais de $\mathbb{C}^n$. Isso ocorre se, e somente se, as colunas são vetores ortonormais de $\mathbb{C}^n$.

1.4. **Transformações lineares (operadores) adjuntos e auto-adjuntos.**

Definition 48. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $A : V \to V$ uma transformação linear. Então existe uma única transformação linear $A^* : V \to V$, chamada de adjunta de A, tal que

$$\langle A(u), v\rangle = \langle u, A^*(v)\rangle\,,\ \forall u, v \in V.$$

Proposition 49. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ com produto interno, $A : V \to V$ uma transformação linear e B uma base ortonormal de V. Logo a matriz de A^* em relação a base B, A^*_B, é a matriz adjunta de A_B, ou seja, $(A^*)_{Bij} = \overline{A_{Bji}}$ se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. A matriz de A^* em relação a base B, A^*_B, é a matriz transposta de A_B, ou seja, $(A^*)_{Bij} = A_{Bji}$ se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.*

Definition 50. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $A : V \to V$ uma transformação linear. Dizemos que A é auto-adjunto se sua adjunta A^* existir e $A = A^*$, ou seja,

$$\langle A(u), v\rangle = \langle u, A(v)\rangle\,, \forall u, v \in V.$$

Definition 51. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ é simétrica se $A = A^t$. Ela é dita auto-adjunta se $A = A^*$ e $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Proposition 52. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ com produto interno, $A : V \to V$ uma transformação linear e B uma base ortonormal de V. Logo A é auto-adjunto se, e somente se, a sua matriz em relação a base B, A_B, é uma matriz simétrica (se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) e é uma matriz auto-adjunta (se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).*

Example 53. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $W \subset V$ um subespaço vetorial. Logo a projeção ortogonal sobre W é um operador auto-adjunto.

2. Determinantes.

2.1. **Definição da função determinante. Existência e unicidade do determinante.** Escrito de forma concisa, o determinante pode ser definido da seguinte forma.

Definition 54. O determinante de matrizes $M_n(\mathbb{F})$ é a única função $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ tal que

1) $\det(A) = 0$ se $A \in M_n(\mathbb{F})$ tem duas linhas iguais.

2) $\det(I_n) = 1$.

3) det é linear como função de cada uma das linhas das matrizes. Assim

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c\alpha_{i1} + d\beta_{i1} & \dots & c\alpha_{in} + d\beta_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = c \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} + d \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \dots & \beta_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

A fim de estudar melhor os determinantes, estudamos cada uma das propriedades acima separadamente. Usaremos a seguinte notação. Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

então denotamos $A_i = (\alpha_{i1} \dots \alpha_{in})$ a i-ésima linha de A. Escrevemos também $A = (A_1, ..., A_n)$, ou seja, A é a matriz cujas linhas são A_i.

Definition 55. Uma função $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ é n-linear se para cada linha i, em que $1 \leq i \leq n$, f é uma função linear da i-ésima linha quando as outras $n-1$ linhas são mantidas fixas. Usando a notação acima, podemos dizer que f é n-linear se para cada i temos que as seguintes relações são válidas.

$$f(A_1, ..., A_i + B_i, ..., A_n) = f(A_1, ..., A_i, ..., A_n) + f(A_1, ..., B_i, ..., A_n),$$
$$f(A_1, ..., cA_i, ..., A_n) = cf(A_1, ..., A_i, ..., A_n).$$

Proposition 56. *Uma combinação linear de funções n-lineares é n-linear.*

Proposition 57. *Seja $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ uma função n-linear. Logo as seguintes afirmações são equivalentes*

(i) $f(A) = 0$ para qualquer matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ que possua duas linhas iguais. ($f(A_1, ..., A_n) = 0$ sempre que $A_i = A_j$ para algum $i \neq j$).

(ii) $f(A) = -f(A')$ se A' é obtida de A por uma única permutação de linhas. ($f(A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n) = -f(A_1, ..., A_j, ..., A_i, ..., A_n)$).

Definition 58. Seja $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ uma função n-linear. Dizemos que f é alternada se as condições abaixo são satisfeitas (basta verificar uma delas, já que elas são equivalentes):

(i) $f(A) = 0$ sempre que duas linhas de A forem iguais.

(ii) $f(A) = -f(A')$ se A' é obtida fazendo uma permutação de 2 linhas de A.

Podemos assim reescrever a definição de função determinante.

Definition 59. Uma função determinante em $M_n(\mathbb{F})$ é uma função $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ tal que f é n-linear alternada e $f(I_n) = 1$.

Definition 60. Se $n > 1$ e A é uma $n \times n$ matriz, vamos definir $A(i|j)$ a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida de A retirando a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Se f é uma função $(n-1)$-linear e $A \in M_n(\mathbb{F})$, então definimos $f_{ij} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ por $f_{ij}(A) = f(A(i|j))$.

Lemma 61. *Se $f : M_{n-1}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ é $(n-1)-$linear, então $f_{ij} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ é linear em todas as linhas menos na i-ésima.*

Lemma 62. *Se $f : M_{n-1}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ é $(n-1)-$linear, então a função $g : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ dada por*

$$g(A) = A_{ij} f_{ij}(A)$$

é n-linear.

Lemma 63. *Seja $A \in M_n(\mathbb{F})$. Se a linha k de A é igual a linha l de A, ou seja, $A_k = A_l$ e $l > k$, então a matriz $A(k|j)$ é obtida da matriz $A(l|j)$ por $l-k-1$ permutações das linhas.*

Theorem 64. *Seja $n > 1$ e $f : M_{n-1}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ uma função $(n-1)$-linear alternada. Logo a função $E_j : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ definida por*

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} f_{ij}(A)$$

é uma função n-linear alternada. Se $f : M_{n-1}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ é uma função determinante de $M_{n-1}(\mathbb{F})$, então E_j é função determinante de $M_n(\mathbb{F})$.

Corollary 65. *(Existência do determinante) Para todo inteiro $n \geq 1$, existe ao menos uma função $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ determinante. Notemos ainda que*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det(A(i|j)).$$

Pela unicidade do determinante (proposição que será enunciada mais adiante) a fórmula acima independe de j escolhido. É chamado de desenvolvimento do determinante pela j-ésima coluna.

Usaremos agora a notação $\epsilon_1 = (1,0,0,...,0)$, $\epsilon_2 = (0,1,0,...,0)$,..., $\epsilon_n = (0,...,0,1)$ para denotar as linhas da matriz identidade. Se $A = (A_1,...,A_n) \in M_n(\mathbb{F})$ então as linhas A_i são $A_i = (A_{i1},...,A_{in}) = A_{i1}\epsilon_1 + ... + A_{in}\epsilon_n$. Assim temos:

Proposition 66. *Seja $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ uma função n-linear. Logo*

$$f(A) = \sum_{k_1=1}^{n} ... \sum_{k_n=1}^{n} A_{1k_1}...A_{nk_n} f(\epsilon_{k_1},...,\epsilon_{k_n}).$$

Definition 67. Uma seqüência $(k_1,...,k_n)$ em que $k_i \in \{1,...,n\}$ para todo i é chamada de permutação de grau n se todos os k_i forem distintos. De forma equivalente podemos definir: uma permutação de grau n é uma função $f : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$ bijetora. Assim dado uma função f bijetora temos a seqüência $(f(1),...,f(n))$ e dado uma seqüência $(k_1,...,k_n)$, podemos definir uma função bijetora $f : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$ tal que $f(i) = k_i$. (Na verdade, lembrando a definição de seqüência tudo o que foi dito acima é equivalente). Usaremos a notação σ para denotar uma permutação $\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$. Assim $\sigma = (\sigma_1,...,\sigma_n)$.

Definition 68. Denotamos por S_n o conjunto das permutações de grau n.

Definition 69. Dizemos que uma permutação $(k_1,...,k_n)$ foi obtida de uma outra permutação $(l_1,...,l_n)$ por uma transposição se $(k_1,...,k_n)$ foi obtida de $(l_1,...,l_n)$ apenas pela troca de dois números.

Proposition 70. *Toda permutação de grau n, $(\sigma_1,...,\sigma_n)$, pode ser obtida de $(1,2,...,n)$ por um número finito de transposições.*

Proposition 71. *Se $(\sigma_1,...,\sigma_n)$ foi obtido de $(1,2,...,n)$ por m e por q transposições, então $(-1)^m = (-1)^q$. O número $(-1)^m$ é chamado de sinal da permutação σ, $sign(\sigma)$.*

Theorem 72. *Existe uma única função determinante em $M_n(\mathbb{F})$. Ela é dada por*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) A_{1\sigma_1}...A_{n\sigma_n}.$$

Além disso, se $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ é uma função n-linear alternada, então

$$f(A) = \det(A) f(I_n).$$

Example 73. O determinante em $M_2(\mathbb{F})$ é dado por

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

O determinante em $M_3(\mathbb{F})$ é dado por

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Note que posso calcular o determinante de matrizes 3 por 3 usando a figura abaixo

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Basta somar as diagonais que vão da esquerda para a direita e subtrair as diagonais que vão da direita para a esquerda.

2.2. Propriedades do determinante.

Theorem 74. *Seja* $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ *o determinante em* $M_n(\mathbb{F})$*. Logo para* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *e* $B \in M_n(\mathbb{F})$ *temos*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Corollary 75. *Seja* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *inversível, então* $\det(A) \neq 0$ *e* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Corollary 76. *Seja* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *semelhante a* $B \in M_n(\mathbb{F})$*, então* $\det(A) = \det(B)$.

Proposition 77. *Seja* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *uma matriz arbitrária, então* $\det(A^t) = \det(A)$.

Corollary 78. *Seja* $T \in M_n(\mathbb{R})$ *uma matriz ortogonal e* $U \in M_n(\mathbb{C})$ *uma matriz unitária. Logo* $|\det(T)| = 1$ *e* $|\det(U)| = 1$.

2.3. Calculando determinantes.

Proposition 79. *Se fizermos operações elementares sobre as matrizes os determinantes mudarão da seguinte forma:*

(I) Permutação de duas linhas. O determinante muda de sinal.

(II) Multiplicação de uma linha da matriz por um $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$*. O determinante é multiplicado por* $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$.

(III) Somar uma das linhas da matriz por um múltiplo de outra linha. O determinante permanece o mesmo.

Lemma 80. *Seja* $A \in M_r(\mathbb{F})$ *e* $I_s \in M_s(\mathbb{F})$ *a identidade, com* $r + s = n$*. Logo*

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det(A).$$

Lemma 81. *Seja* $A \in M_r(\mathbb{F})$*,* $B \in M_{r\times s}(\mathbb{F})$ *e* $I_s \in M_s(\mathbb{F})$ *a identidade, com* $r + s = n$*. Logo*

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det(A).$$

Proposition 82. *Seja* $M \in M_n(\mathbb{F})$ *uma matriz* n *por* n *da forma*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

em que $A \in M_r(\mathbb{F})$*,* $B \in M_{r\times s}(\mathbb{F})$ *e* $C \in M_s(\mathbb{F})$*, com* $r + s = n$*. Logo* $\det(M) = \det(A)\det(C)$.

Corollary 83. *Sejam* $A_i \in M_{r_i}(\mathbb{F})$ *e* $B_{ij} \in M_{r_i\times r_j}(\mathbb{F})$*. Logo*

$$\det\begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1n} \\ 0 & A_2 & B_{23} & \dots & \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & A_n \end{pmatrix} = \det(A_1)...\det(A_n).$$

Corollary 84. *Seja A uma matriz triangular*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Logo $\det(A) = a_{11}...a_{nn}$.

Proposition 85. *Se $A \in M_r(\mathbb{F})$, $C \in M_s(\mathbb{F})$ e $B \in M_{s\times r}(\mathbb{F})$, então*

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C).$$

Corollary 86. *Sejam $A_i \in M_{r_i}(\mathbb{F})$ e $B_{ij} \in M_{r_i \times r_j}(\mathbb{F})$. Logo*

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & A_2 & 0 & \dots & \\ B_{31} & B_{32} & A_3 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ B_{n1} & \dots & & & A_n \end{pmatrix} = \det(A_1)...\det(A_n).$$

Seja A uma matriz triangular

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Logo $\det(A) = a_{11}...a_{nn}$.

Assim vemos que uma forma de calcular o determinante de matrizes é usando operações elementares até deixar a matriz na forma triangular. Deve-se tomar cuidado caso for permutar linhas ou multiplicá-las por constantes, pois neste caso o determinante muda.

2.4. **Determinantes e a dependência e independência linear.**

Proposition 87. *Seja $A \in M_n(\mathbb{F})$. Se as linhas de A forem L.D., então* $\det(A) = 0$.

Proposition 88. *Seja $A \in M_n(\mathbb{F})$. Então A é inversível se, e somente se,* $\det(A) \neq 0$.

Proposition 89. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Seja $C = \{u_1, ..., u_n\} \subset V$. Logo C é uma base se, e somente se, $\det(A) \neq 0$ em que A é definido abaixo*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{array}{c} u_1 = a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n \\ \vdots \\ u_n = a_{1n}v_1 + ... + a_{nn}v_n \end{array}.$$

Definition 90. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ e $T : V \to V$ uma transformação linear. Definimos $\det : L(V) \to \mathbb{F}$ como $\det(T) := \det(T_B)$, em que T_B é a matriz de T em relação a uma base B. Este número independe da base B escolhida e é chamado de determinante de T.

Proposition 91. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ e $F : V \to V$ e $G : V \to V$ duas transformações lineares. Logo valem as seguintes propriedades*

1) $\det(F \circ G) = \det(F)\det(G)$.

2) Seja $I : V \to V$ a aplicação identidade ($I(v) = v \ \forall v \in V$), então $\det(I) = 1$.

3) $\det(F) \neq 0$ *se, e somente se,* F *é um automorfismo.*

2.5. **A forma de inversão de matrizes usando a matriz dos cofatores.**

Definition 92. Seja $A \in M_n(\mathbb{F})$ uma matriz quadrada n por n. Definimos o i, j cofator de A como o elemento

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A(i|j)).$$

Proposition 93. *Se* $j \neq k$, *então* $\sum_{i=1}^n C_{ik}A_{ij} = 0$. *Logo* $\sum_{i=1}^n C_{ik}A_{ij} = \delta_{jk}\det(A)$.

Definition 94. A matriz adjunta clássica de $A \in M_n(\mathbb{F})$ é a transposta da matriz dos cofatores de A, ou seja,

$$adj(A)_{ij} = C_{ji} = (-1)^{i+j}\det(A(j|i)).$$

Theorem 95. *Seja* $A \in M_n(\mathbb{F})$. *Logo se* A *é inversível, ou seja,* $\det(A) \neq 0$, *então*

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1}adj(A).$$

2.6. **A regra de Cramer.**

Proposition 96. *Seja* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *uma matriz inversível e* $Y \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ *uma matriz dada. Assim a equação* $AX = Y$ *tem solução única* $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, *em que* $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ *é dado por*

$$X_i = \frac{1}{\det(A)}\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} Y_j \det(A(j|i)),$$

ou seja, $X_i = \frac{1}{\det(A)}\det(B_i)$, *em que* B_i *é dado por*

$$B_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & y_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & y_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Diagonalização

3.1. **Auto-vetores e auto-valores.**

Definition 97. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $T : V \to V$ uma transformação linear. Um vetor $u \in V$, $u \neq o$, é um auto-vetor de T se existe $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $T(u) = \lambda u$. Neste caso λ é um auto-valor de T associado a u e u é um auto-vetor de T associado a λ.

Alguns sinônimos: Auto-valor, valor próprio, valor característico (em textos escritos em inglês: eigenvalue).

Auto-vetor, vetor próprio, vetor característico (em textos escritos em inglês: eigenvector).

Proposition 98. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{F}$ *e* $T : V \to V$ *uma transformação linear. Seja* u *um auto-vetor de* T. *Logo existe um único* $\lambda \in \mathbb{F}$ *que é um auto-valor de* T *associado a* u.

Proposition 99. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{F}$, $T : V \to V$ *uma transformação linear e* $\lambda \in \mathbb{F}$. *O espaço de todos os autovetores de* V *com autovalor* λ *unido ao conjunto* $\{o\}$, *ou seja,* $V(\lambda) = \{u \in V; T(u) = \lambda u\}$ *é um subespaço de* V *(Note que* $T(o) = o = \lambda o$*). Além disso,* $V(\lambda) = Ker(T - \lambda I)$.

Definition 100. Seja V um espaço vetorial e $T : V \to V$ uma transformação linear. O subespaço próprio de λ, indicado por $V(\lambda)$, é o conjunto

$$V(\lambda) = \{u \in V; T(u) = \lambda u\} = Ker(T - \lambda I).$$

Proposition 101. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{F}$ *de dimensão finita,* $B = (v_1, ..., v_n)$ *uma base ordenada de* V *e* $T : V \to V$ *uma transformação linear de* V *em* V. *Logo* λ *é um autovalor de* T *se, e somente se,*

$$\det(T_B - \lambda I_n) = 0.$$

Definition 102. Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$. O polinômio característico de A, denotado por $p_A(t)$, é o seguinte polinômio:

$$P_A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} = \det(A - tI_n).$$

Proposition 103. *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.*

Corollary 104. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e $T : V \to V$ uma transformação linear. Sejam B e C bases ordenadas de V, então $p_{T_B} = p_{T_C}$, ou seja, os polinômios característicos de T_B (representação de T na base B) e T_C (representação de T na base C) são iguais.*

Definition 105. Seja V um espaço vetorial de dimensão n finita e $T : V \to V$ uma transformação linear. Definimos o polinômio característico de T como o polinômio característico de T em relação a qualquer base de V, ou seja, $p_T = p_{T_B}$, em que B é uma base qualquer. (Como vimos anteriormente este polinômio independe da base B).

Proposition 106. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão n e $T : V \to V$ uma transformação linear, então os auto-valores de T são as raízes do polinômio característico p_T em $\mathbb{F}$.*

Sistematizando (Importante):

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão n e $T : V \to V$ uma transformação linear. Para achar os auto-valores e auto-vetores de T podemos proceder da seguinte forma:

(1) Encontre uma base ordenada B de V.
(2) Escreva a representação de T na base B, T_B.
(3) Ache o polinômio característico de T, $p_T(t) = \det(T_B - tI_n)$.
(4) Determine as raízes de p_T. As raízes serão os auto-valores: $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$.
(5) Dado λ_i um auto-valor de T, determine o núcleo do operador $T - \lambda_i I$. O núcleo deste operador serão os auto-vetores de T associados a λ_i. Note que $Ker(T - \lambda_i I) \neq \{o\}$.

Lembramos que para determinar o núcleo do operador $T - \lambda_i I$ basta escrevê-lo na base B. Após isto temos que achar $X_B \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ tal que $(T_B - \lambda_i I_n)X_B = 0$, ou seja, se $X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, então

$$\begin{cases} ((T_B)_{11} - \lambda_i)\, x_1 + ... + (T_B)_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ (T_B)_{n1} x_1 + ... + ((T_B)_{nn} - \lambda_i)\, x_n = 0. \end{cases}.$$

As soluções deste sistema, ou seja, o conjunto solução deste sistema serão as coordenadas dos auto-vetores associados a λ_i na base B.

3.2. Diagonalização de transformações lineares e matrizes.

Definition 107. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Sejam W_1,...,W_k subespaços de W. Então dizemos que $W = W_1 \oplus ... \oplus W_k$ é uma soma direta se

$$W = W_1 + W_2 + ... + W_k$$

e para todo $2 \leq i \leq n$, temos

$$W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1}) = \{o\}.$$

Proposition 108. *Sejam W_1,...,W_k subespaços de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{F}$. Seja $W = W_1 + ... + W_k$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Se $u_1 \in W_1$,...,$u_k \in W_k$ são tais que $u_1 + ... + u_k = o$, então $u_1 = ... = u_k = o$.

(ii) Se $u \in W$, então u pode ser escrito de maneira única como

$$u = u_1 + ... + u_k,$$

em que $u_1 \in W_1$,..., $u_k \in W_k$.

(iii) $W = W_1 \oplus ... \oplus W_k$, ou seja, $W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1}) = \{o\}$ se $2 \leq i \leq k$.

Proposition 109. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$ e W_1,...,W_k subespaços de V. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $W = W_1 \oplus ... \oplus W_k$.

(ii) Se B_i é base de W_i, então $B = \cup_{i=1}^{k} B_i$ é base de W.

Corollary 110. *Se $W = W_1 \oplus ... \oplus W_k$, então* $\dim(W) = \dim(W_1) + ... + \dim(W_k)$.

Definition 111. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$. Um operador $T: V \to V$ se diz diagonalizável se existe uma base de V formada apenas de vetores próprios.

Proposition 112. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ e $T: V \to V$ uma transformação linear. Então T é diagonalizável se, e somente se, existe uma base ordenada B de V tal que T_B é uma matriz diagonal.*

Definition 113. Seja $p \in \mathbb{F}[x]$ um polinômio com coeficientes em $\mathbb{F}$ e raízes $a_1,...,a_m \in \mathbb{F}$, $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$. Logo

$$p(x) = (x - a_1)^{r_1}...(x - a_m)^{r_m} q(x),$$

em que $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$ e $q(x) \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{F}$. A multiplicidade algébrica da raiz $a_i \in \mathbb{F}$ deste polinômio é por definição r_i.

Definition 114. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{F}$. Se $T: V \to V$ é uma transformação linear, então $p_T(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}...(\lambda_m - t)^{r_m} q(t)$, em que $q(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{F}$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. λ_i são os auto-valores de T como já vimos. Assim a multiplicidade algébrica do auto-valor λ_j é por definição r_j. A multiplicidade geométrica do auto-valor λ_j é por definição $\dim V(\lambda_j) = \dim (Ker(T - \lambda_j I))$.

Remark 115. Seja $p \in \mathbb{C}[x]$. Logo se p tem grau maior do que $n \geq 1$, então p tem n raízes (que podem ser iguais). Logo p se escreve como

$$p(x) = c(x - a_1)...(x - a_n),$$

em que $c \in \mathbb{F}$ e a_i podem se repetir, ou seja,

$$p(x) = c(x - b_1)^{r_1}...(x - b_m)^{r_m},$$

em que $r_1 + ... + r_m = n$ e $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$ são as raízes do polinômio. Este é chamado de Teorema fundamental da álgebra.

Theorem 116. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre $\mathbb{F}$, em que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma transformação linear $T: V \to V$ é diagonalizável se, e somente se,*

1) O polinômio característico de T tem todas as suas raízes em $\mathbb{F}$ (sempre é o caso se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ pelo teorema fundamental da álgebra):

$$p_T(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}...(\lambda_m - t)^{r_m},$$

em que $r_1 + ... + r_m = n$ e λ_j são as raízes (distintas entre si) de p_T.

2) A multiplicidade algébrica de cada auto-valor λ_j é igual a sua multiplicidade geométrica, ou seja,

$$r_j = \dim (Ker(T - \lambda_j I)).$$

Proposition 117. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ e $T: V \to V$ uma transformação linear. Seja λ um auto-valor de T. Logo a multiplicidade geométrica é menor ou igual a multiplicidade algébrica de λ.*

Corollary 118. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ sobre $\mathbb{F}$ e $T: V \to V$ uma transformação linear. Suponha que o polinômio característico de T, p_T, tenha a seguinte forma*

$$p_T(t) = (\lambda_1 - t)...(\lambda_n - t),$$

em que $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Então T é diagonalizável.

Sistematizando (Importante):

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão n e $T: V \to V$ uma transformação linear. Para diagonalizar T podemos proceder da seguinte forma:

(1) Encontre uma base ordenada B de V.
(2) Escreva a representação de T na base B, T_B.
(3) Ache o polinômio característico de T, $p_T(t) = \det(T_B - tI_n)$.
(4) Determine as raízes de p_T. As raízes serão os auto-valores: $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$.
(5) Verifique se todas as raízes pertencem a $\mathbb{F}$ (em $\mathbb{C}$ é sempre verdade), ou seja, verifique se

$$p_T(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}...(\lambda_m - t)^{r_m},$$

com $r_1 + ... + r_m = n$. Se isto não ocorrer, então T não é diagonalizável.
(6) Dado λ_i um auto-valor de T, determine o núcleo do operador $T - \lambda_i I$. O núcleo deste operador serão os auto-vetores de T associados a λ_i. Verifique se $r_j = \dim (Ker(T - \lambda_j I))$, ou seja, se a multiplicidade algébrica é igual a multiplicidade geométrica. Se não for, T não é diagonalizável.

(7) Ache B_i base ordenada de $Ker(T-\lambda_i I)$, $B_i = (u_{i1}, ..., u_{ir_i})$. Na base $C = (u_{11}, ..., u_{1r_1}, ..., u_{m1}, ..., u_{mr_m})$ T_C será dado por

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_m & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

(8) Por fim notemos que T_B e T_C se relacionam por

$$T_C = I_{BC} T_B I_{CB} = (I_{CB})^{-1} T_B I_{CB}.$$

Notemos que I_{CB} será a matriz cujas colunas são os auto-vetores escritos em termos de B, ou seja, são as coordenadas dos auto-vetores na base B. Assim se os auto-vetores são u_i e são escritos como X_{iB} na base B

$$X_{iB} = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}_B ,$$

então

$$I_{CB} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Uma matriz sempre pode ser pensada como uma transformação linear. De fato seja $A \in M_n(\mathbb{F})$, então A pode ser pensada como a transformação linear $A : M_{n\times 1}(\mathbb{F}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, dada pela multiplicação de matrizes. Assim, a seguinte definição pode ser dada para a diagonalização de matrizes:

Definition 119. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ é diagonalizável se existir $M \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $M^{-1}AM = D$, em que $D \in M_n(\mathbb{F})$ é uma matriz diagonal.

O mesmo procedimento pode ser usado para diagonalizar matrizes. A matriz M será a matriz cujas colunas são os autovetores de A visto como operador de $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ em $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, ou seja, as colunas serão constituídas de matrizes $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ que satisfazem

$$AX = \lambda X.$$

3.3. Diagonalização de transformações lineares auto-adjuntas e matrizes simétricas e auto-adjuntas.

Proposition 120. *Seja $A : V \to V$ um operador auto-adjunto ($\mathbb{F}$ é igual a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Logo todas as raízes do polinômio característico são reais, ou seja,*

$$p_A(t) = (t-\lambda_1)^{r_1} ... (t-\lambda_m)^{r_m},$$

com $r_1 + ... + r_m = n$ e $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Assim os auto-valores de A são reais também quando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Theorem 121. *Um operador linear $A : V \to V$ em um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ finitamente gerado com produto interno é auto-adjunto se, e somente se, existe uma base ortonormal de auto-vetores de A com auto-valores reais. Em particular se A é auto-adjunto, então A é diagonalizável.*

Corollary 122. *Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz auto-adjunta, então existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ unitária tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica, então existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que $M^{-1}AM$ é uma matriz diagonal.*