EXERCÍCIO DA SEGUNDA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos dois problemas abaixo para entregar até o dia **6 de abril**.

Problema 1. Resolva os itens a) e b) abaixo:

a) Mostre que não existe nenhuma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ suave por partes e 2π-periódica tal que a série de Fourier seja a série abaixo:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{sen(nx)}{\ln(n)}.$$

(Dica: Verifique se os coeficientes de Fourier de f podem satisfazer a desigualdade de Bessel. Justifique)

b) Considere uma corda ocupando o intervalo $0 \leq x \leq L$ e seja $u(t,x)$ o deslocamento transversal da corda no tempo $t \geq 0$ e no ponto $x \in [0, L]$. Suponha que

$$u(0,x) = \begin{cases} \frac{2m}{L}x, \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}L \\ \frac{2m}{L}(L-x), \ \frac{1}{2}L \leq x \leq L \end{cases}$$

e que $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$. Note que $m > 0$ é uma constante. Ela corresponde ao máximo deslocamento inicial da corda, ou seja, ao valor máximo de $x \mapsto u(0,x)$.

i) Calcule $u(t,x)$ para $t > 0$ e $x \in [0, L]$, usando série de Fourier. (Dica: Calcule a expansão de Fourier seno das funções $x \mapsto u(0,x)$ e $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)$ e use a fórmula da solução da equação da onda encontrada em sala de aula).

ii) Usando a expressão da solução da equação de onda encontrada em sala de aula:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[G(x+ct) - G(x-ct)\right],$$

em que $f(x) = u(0,x)$ e G é uma primitiva de $g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)$, encontre $u(t,x)$ para $t > 0$ e $x \in [0, L]$.

Problema 2. Resolva os itens a) e b) abaixo:

a) Mostre que não existe nenhuma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 e 2π-periódica tal que a série de Fourier seja a série abaixo:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n}.$$

(Dica: Verifique se os coeficientes de Fourier da função f' (a derivada de f) podem satisfazer a desigualdade de Bessel. Justifique).

b) Considere uma haste de cobre de $100cm$, cuja temperatura inicial seja de $100^{\circ}C$ e cujas as pontas sejam mantidas a zero graus. Suponha que o coeficiente de difusão (o k da equação do calor) seja $k = 1,1\, cm^2/sec$. Neste caso:

i) Ache a temperatura da haste para tempos maiores do que zero, ou seja, calcule $u(t,x)$ para $t > 0$ e $x \in [0, 100]$. (Dica: Ache a expansão de Fourier em seno da função $f : [0, 100] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 100$ e use a fórmula da solução da equação do calor encontrada em sala de aula)

ii) Ache uma estimativa numérica (calculando alguns termos da solução) para os valores da temperatura no meio da haste nos tempos 30, 60, 300 e 3600, ou seja, estime os valores de $u(30, 50)$, $u(60, 50)$, $u(300, 50)$ e $u(3600, 50)$.