EXERCÍCIO DA TERCEIRA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos dois problemas abaixo para entregar até o dia **27 de abril.**

Problema 1. Resolva os itens a), b) e c) abaixo:

a) Considere as funções $\left\{\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sen}(nx),\, n \geq 1\right\}$. Mostre que elas são ortonormais como funções em $L^2\,(0,\pi)$, ou seja,

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^\pi \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}dx = \int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sen}(nx)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{sen}(mx)\right)dx = \delta_{nm} := \begin{cases} 1, \text{se}\, n = m \\ 0, \text{se}\, n \neq m \end{cases}.$$

b) Mostre que se $f \in L^2(0,\pi)$, então

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

equivale a expansão de série de Fourier em seno. (Substitua $\langle f, \phi_n \rangle$ pela integral e ϕ_n pelas funções acima e verifique que a somatória acima é exatamente igual a expansão de Fourier em seno).

c) Ache a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ dada abaixo:

$$f(\theta) = \begin{cases} 0,\, \theta \in [-\pi, 0] \\ 1,\, \theta \in]0, \pi] \end{cases}.$$

Usando a Fórmula de Parseval e a expressão obtida, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Problema 2. Resolva os itens a), b) e c) abaixo:

a) Considere as funções $\left\{\phi_n\,(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\, n \geq 1\right\} \cup \left\{\phi_0\,(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}\right\}$. Mostre que elas são ortonormais como funções em $L^2\,(0,l)$, ou seja,

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^\pi \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}dx = \delta_{nm} := \begin{cases} 1, \text{se}\, n = m \\ 0, \text{se}\, n \neq m \end{cases}..$$

b) Mostre que se $f \in L^2(0,l)$, então

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

equivale a expansão de série de Fourier em cosseno. (Substitua $\langle f, \phi_n \rangle$ pela integral e ϕ_n pelas funções acima e verifique que a somatória acima é exatamente igual a expansão em cosseno).

c) Ache a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ dada abaixo:

$$f(\theta) = \begin{cases} -1,\, \theta \in [-\pi, 0] \\ 1,\, \theta \in]0, \pi] \end{cases}.$$

Usando a Fórmula de Parseval e a expressão obtida, mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.