EXERCÍCIO DA QUARTA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos dois problemas abaixo para entregar até o dia **20 de maio**.

Problema 1. Resolva os itens a) e b) abaixo:

a) Ache a expansão em série de Fourier seno da função $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$, ou seja, ache constantes b_n, $n \geq 1$, tais que $1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$. Conclua que

$$Re^{-ct} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Re^{-ct} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

b) Resolva o problema abaixo, procurando soluções da forma $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\,, \quad (t,x) \in \left]0,\infty\right[\times \left]0,l\right[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t > 0 \\ u(0,x) = 0, \quad x \in \left]0,l\right[\end{cases}.$$

Problema 2. Resolva os itens a) e b) abaixo:

a) Ache uma solução $u_0 : [0, l] \to \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_0}{dx^2}(x) = \frac{g}{c^2} \\ u_0(0) = u_0(l) = 0 \end{cases},$$

em que $\frac{g}{c^2}$ é uma constante.

b) Resolva o problema abaixo. Para tanto, suponha que a função u seja uma solução do problema. Determine a função $v(t,x) = u(t,x) - u_0(x)$ e obtenha u a partir de u_0 e v.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - g, \quad (t,x) \in \left]0,\infty\right[\times \left]0,l\right[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t > 0 \\ u(0,x) = 0, \quad x \in \left]0,l\right[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \quad x \in \left]0,l\right[\end{cases}.$$