EXERCÍCIOS DA QUINTA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos dois exercícios abaixo para entregar até o dia **14 de junho**.

Problema 1. Seja $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ a bola unitária. Vamos considerar coordenadas polares $x = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$. Vamos denotar por $P(r, \theta)$ o núcleo de Poisson no ponto r e θ, ou seja, temos

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2rcos(\theta)}.$$

Seja u a solução do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ em } \Omega \\ u = f, \text{ em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Logo, a fórmula de Poisson nos diz que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \phi) f(\phi) d\phi.$$

Partindo destes fatos:

a) Mostre que o valor de u na origem (no ponto $(x, y) = (0, 0)$) é igual a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi$. (Isto nos diz que u na origem é igual a média de f no bordo)

b) Mostre que se $f = 1$, então $u = 1$ é a solução do problema. (Não precisa usar a fórmula de Poisson. Apenas verifique este fato)

c) Mostre que $P(r, \theta) > 0$ e que $\int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta) d\theta = 2\pi$ para todo $r < 1$. (Dica: para mostrar que a integral é igual a 2π use a fórmula de Poisson e as funções do item b))

d) Conclua que se $f(\theta) \leq M$, então $u(r, \theta) \leq M$ para todo $r < 1$ e θ. (Dica: Use a fórmula de Poisson e o item c))

Problema 2. Considere o Laplaciano em coordenadas polares dado por

$$\Delta u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0.$$

a) Mostre que, usando o método de separação de variável, as soluções da forma $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ devem satisfazer

$$\begin{matrix} r^2 R''(r) + rR'(r) - \nu^2 R(r) = 0 \\ \Theta''(\theta) + \nu^2 \Theta(\theta) = 0 \end{matrix},$$

em que ν^2 é um número complexo qualquer.

b) Consideremos a seguinte equação:

$$r^2 f''(r) + arf'(r) + bf(r) = 0.$$

Mostre que r^{λ_1} e r^{λ_2} são solução da equação acima se λ_1 e λ_2 são raízes do polinômio

$$\lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0.$$

No caso em que $\lambda_1 = \lambda_2$, mostre que $r^{\lambda_1} \ln(r)$ também é solução da equação acima.

c) Usando os resultados acima e impondo que a solução seja contínua na origem, vimos em sala de aula que a solução geral num círculo do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ em } \Omega \\ u = f, \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

é dada por

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}, \text{ com } u(1, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = f(\theta).$$

Ache a solução geral no caso em que $f(\theta) = 1 + 2sen(\theta) = 1 + ie^{-i\theta} - ie^{i\theta}$. (Use os seus conhecimentos sobre série de Fourier para determinar c_n)