EXERCÍCIOS DA SEXTA QUINZENA

Escolha um (apenas um) dos dois exercícios abaixo para entregar até o dia **28 de junho**.

Problema 1. Dado $a > 0$, definamos $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por $f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$.

a) Calcule $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)$ e $\mathcal{F}\left(\chi_a(x)\right)$, em que

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

Sabendo que $\mathcal{F}\left(\mathcal{F}(f)\right)(x) = 2\pi f(-x)$ e usando os resultados obtidos anteriormente, calcule $\mathcal{F}\left(\frac{a}{\pi(x^2+a^2)}\right)$ e $\mathcal{F}\left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\right)$.

b) Use a transformada de Fourier para mostrar que

$$f_a * f_b = f_{a+b}.$$

(Dica: Use que a transformada de Fourier leva convolução em multiplicação)

c) Use o Teorema de Parseval (também conhecido como Plancherel) para demonstrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(at)\operatorname{sen}(bt)}{t^2} dt = \pi \min(a,b).$$

Problema 2. Dado $a > 0$, definamos $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por $g_a(x) = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\pi x}$.

a) Calcule $\mathcal{F}\left(H(x)e^{-ax} - H(-x)e^{ax}\right)$ e $\mathcal{F}\left(\chi_a(x)\right)$, em que

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

(Note que $H(x)e^{-a|x|} - H(-x)e^{ax}$ é a função que é igual a e^{-ax}, para $x > 0$, igual a e^{ax}, para $x < 0$, e igual a 0 para $x = 0$).

Sabendo que $\mathcal{F}\left(\mathcal{F}(f)\right)(x) = 2\pi f(-x)$ e usando os resultados obtidos anteriormente, calcule$\mathcal{F}\left(\frac{x}{x^2+a^2}\right)$ e $\mathcal{F}\left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{\pi x}\right)$.

b) Use a transformada de Fourier para mostrar que

$$g_a * g_b = g_{\min(a,b)}.$$

(Dica: Use que a transformada de Fourier leva convolução em multiplicação)

c) Use o Teorema de Parseval (também conhecido como Plancherel) para demonstrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)} dt = \frac{\pi}{a+b}.$$