EXERCÍCIOS DA SÉTIMA QUINZENA

O Exercício abaixo é opcional. Ele pode ser feito para substituir a pior nota de algum dos outros exercícios (só substituirá se for para melhorar a nota). Quem quiser fazer o exercício, deve entregá-lo até o dia **5 de julho**.

Problema 1. Seja f_1 e f_2 soluções da equação de Bessel de ordem ν, ou seja, f_1 e f_2 resolvem a Equação de Bessel definida abaixo:

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right) f(x) = 0.$$

Seja W o Wronskiano, ou seja, $W(x) = f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x)$.

a) Use a equação de Bessel para mostrar que $W'(x) = -\frac{W(x)}{x}$. Conclua que $\frac{d}{dx}(xW(x)) = 0$, ou seja, $W(x) = \frac{C}{x}$, para alguma constante $C > 0$. (Dica: Derive W e substitua f_1'' e f_2'' por termos só envolvendo f_1, f_1', f_2, f_2').

b) Sabemos que as funções de Bessel são definidas como

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Use esta expressão para mostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

e que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\nu+1} \frac{dJ_\nu(x)}{dx} = \frac{\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}.$$

c) Mostre que se $f_1 = J_\nu$ e se $f_2 = J_{-\nu}$, então $W(x) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi x}$. (Dica: Pelo item a), sabemos que $W(x) = \frac{C}{x}$. Assim, vemos que $C = \lim_{x\to 0^+} xW(x)$. Use o item b) para mostrar que $\lim_{x\to 0^+} xW(x) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi}$. O seguinte fato pode (e deve) ser usado sem demonstração: $\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\nu\pi}{\sin(\nu\pi)}$).

d) Mostre que, para $\nu \notin \mathbb{Z}$, se $f_1 = J_\nu$ e $f_2 = Y_\nu$, então $W(x) = \frac{2}{\pi x}$. Lembremos que

$$Y_\nu(x) = \frac{cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

(Dica: Use o resultado c)).