MAP 2313 - Tópicos Mat. Aplicada T34

4º 8:00-9:40 SALA - A - 243

6º 10:00-11:40 SALA 11 (IAG)

Data das Provas:

Critério de Avaliação: $M = 0,8 \times \frac{P_1+P_2}{2} + 0,2\,p$ $\quad P_1, P_2$ provas. p exercícios.

Sub: $\max\left\{\frac{M+S}{2}, M\right\}$. Só pode fazer se $M < 5$ ou substitui prova

Site: WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/TMA.HTML.

Bibliografia: 1) Gerald B. Folland - Fourier Analysis and its Applications

2) Kreyszig -

1º aula - Alguns exemplos de equações da física matemática.

(Modelo para teoria de EDP):

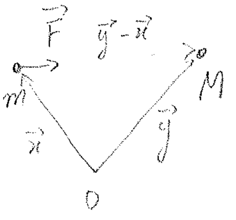
Vamos começar dando 4 exemplos clássicos da física.

			Aplicações
1º exemplo)	Equação de Laplace (de Poisson	$\Delta u = 0$ $\Delta u = f$)	• u pode ser potencial eletrostático e f pode ser densidade de carga. • u pode ser potencial gravitacional e f pode ser densidade de massa. $(n=3)$
2º exemplo)	Equação do Calor	$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u$.	• u pode ser a temperatura num material homogêneo. • u pode ser a concentração de um corante na água.
3º exemplo)	Equação da Onda	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$.	• u pode ser deslocamento transversal de uma corda. • u pode ser um componente do campo elétrico.
4º exemplo)	Equação de Schrödinger	$i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + V(x)u$	• u é a função de onda de uma partícula sujeita ao potencial V.

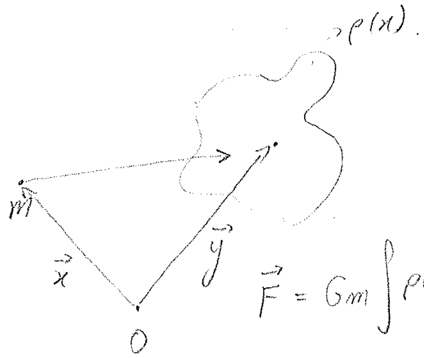
Acima utilizamos $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$. Também denotamos o Laplaciano por ∇^2.

Deduzindo as equações acima:

1) Equação de Poisson: (Gravidade)



$$\vec{F} = \frac{GM}{|\vec{y}-\vec{x}|^3}(\vec{y}-\vec{x})$$



$$\vec{F} = Gm\int \rho(\vec{y})\frac{\vec{y}-\vec{x}}{|\vec{y}-\vec{x}|^3}\,dy$$

②

Logo $\vec{F}(x) = -\nabla u(x)$, em que $u(x) = -\iiint \frac{\rho(y)}{|y-x|}\,dy = -\int \frac{\rho(x+y)}{|y|}\,dy$.

(Usamos $\nabla\left(\frac{1}{|y-x|}\right) = \frac{y-x}{|y-x|^3}$).

Desta maneira,

$$\Delta u(x) = -\int \frac{\Delta\rho(x+y)}{|y|}\,dy = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Delta\rho(x+y)}{|y|}\,dy$$

Seja $\phi(y) = \frac{1}{|y|}$. Logo $\frac{\partial\phi}{\partial y_j} = -\frac{y_j}{|y|^3}$ e $\frac{\partial^2\phi}{\partial y_j^2} = -\frac{1}{|y|^3} + \frac{3}{2}\frac{2y_j^2}{|y|^5} = -\frac{1}{|y|^3} + 3\frac{y_j^2}{|y|^5}$.

Desta maneira, $\Delta\phi = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\phi}{\partial y_j^2} = -\frac{3}{|y|^3} + 3\frac{|y|^2}{|y|^5} = 0$.

Logo $\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\left(\rho(x+y)\Delta\phi(y) - \phi(y)\Delta\rho(x+y)\right)dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\nabla\cdot\left(\rho(x+y)\nabla\phi(y) - \phi(y)\nabla\rho(x+y)\right)dy =$

$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|=\varepsilon}\left(\rho(x+y)\nabla\phi(y) - \phi(y)\nabla\rho(x+y)\right)\cdot\vec{n}\,d\sigma_y = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|=\varepsilon}\left(\rho(x+y)\frac{\partial\phi}{\partial n}(y) - \phi(y)\frac{\partial\rho}{\partial n}(x+y)\right)dy$

$\downarrow$ n normal para fora da esfera

Usaremos que $\frac{\partial\phi}{\partial n}(y) = \nabla\phi(y)\cdot n = -\frac{y}{|y|^3}\cdot n = -\frac{y}{|y|^3}\cdot\frac{y}{|y|} = -\frac{|y|^2}{|y|^4} = -\frac{1}{|y|^2} = -\frac{1}{\varepsilon^2}$ e $\phi(y) = \frac{1}{|y|} = \varepsilon$. Assim

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|y|=\varepsilon}\left(\rho(x+y) - \varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial n}(x+y)\right)dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{|y|=\varepsilon}\rho(x+y)\,dy - \frac{1}{\varepsilon}\int_{|y|=\varepsilon}\frac{\partial\rho}{\partial n}(x+y)\,dy\right\} = 4\pi\rho(x).$$

Logo $\Delta u(x) = 4\pi\rho(x)$ e $F(x) = -\nabla u(x)$

2) Equação de Schrödinger.

$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$. Hamiltoniano. Fazemos as substituições $p \mapsto \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, $H \mapsto i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$.

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + V(x)u.}$$

//

3) Equação da Onda (Eletromagnetismo)

Equações de Maxwell

1) $\nabla\times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$	3) $\nabla\times B = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}J$
2) $\nabla\cdot E = 4\pi\rho$	4) $\nabla\cdot B = 0$

//

Usaremos: Se $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, então

$$\Delta F = -\nabla\times(\nabla\times F) + \nabla(\nabla\cdot F).$$

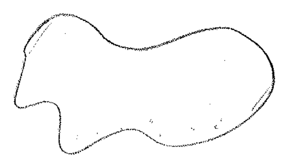
Logo $\Delta E = -\nabla\times(\nabla\times E) + \nabla(\nabla\cdot E) = -\nabla\times\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}\right) + \nabla(4\pi\rho) =$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times B) + 4\pi\nabla\rho = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}J\right) + 4\pi\nabla\rho$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t} + 4\pi\nabla\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = -4\pi\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t} + \nabla\rho\right)}$$

2) Equação do Calor (Termodinâmica).

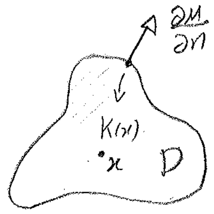
Seja  Ω um material. Assumiremos que em torno do ponto $x\in\Omega$, temos.

$$\boxed{\underbrace{\Delta E}_{\text{variação de energia}} = \underbrace{\sigma(x)}_{\text{densidade do calor específico}}\underbrace{\Delta u}_{\text{variação de temperatura}}\underbrace{\Delta V}_{\text{volume}}}$$

Logo $\frac{\partial E}{\partial t} = \int_D \sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,dV$, em que $D\subset\Omega$

Porém assumiremos que $\frac{\partial E}{\partial t}$ = fluxo de calor através de ∂D + $\int_D F(x,t)\,dx$, em que F é a taxa no qual o calor está sendo produzido em um ponto x no tempo t.

No entanto, o fluxo de calor é proporcional a diferença de temperatura



Fluxo de Calor $= -\int_{\partial D} K(x)\frac{\partial u}{\partial n}(x)\,d\sigma$

Logo $-\int_{\partial D} K(x)\frac{\partial u}{\partial n}(t,x)\,d\sigma = \int_D \sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,dx.$

Mas $-\int_{\partial D} K(x)\frac{\partial u}{\partial n}(t,x)\,d\sigma = -\int_{\partial D} K(x)\nabla u(t,x)\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_D \nabla\cdot\big(K(x)\nabla u(t,x)\big)\,dx$. Portanto,

$$\boxed{\int_D \sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\,dx = \int_D\Big[\nabla\cdot\big(K(x)\nabla u(t,x)\big) + F(t,x)\Big]\,dx}$$

Como a relação acima vale para $\forall\, D \subset \Omega$, concluímos que

$$\sigma(x)\,\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \nabla\cdot\left[K(x)\,\nabla u(x,t)\right] + F(x,t)$$

Se o material é uniforme, então $\sigma(x)=\sigma$ e $K(x)=K$ são constantes. Logo

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\,\Delta u(t,x) + \sigma^{-1}F(t,x),\quad k = \frac{K}{\sigma}}$$

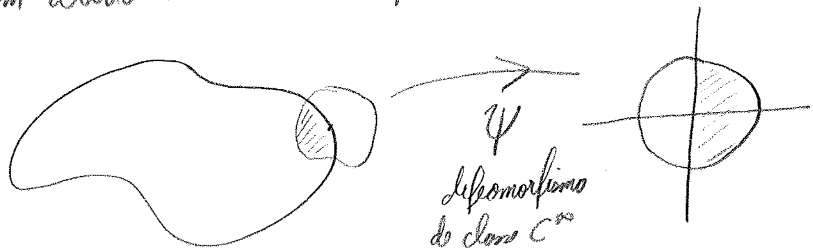
Se não há criação de calor, então $F=0$, $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\,\Delta u(t,x)}$.

Observação: 1) Se σ e K dependem da temperatura u, então obtemos uma equação não-linear.

2) A equação de Laplace ocorre principalmente em meios uniformes (invariantes por translações e rotações)

Condições de Contorno:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira suave



Equação de Laplace: Seja u a temperatura de um material em equilíbrio térmico. $\frac{\partial u}{\partial t}=0$.

Logo podemos ter

$$\begin{cases}\Delta u = 0\\ u|_{\partial\Omega} = g\end{cases}$$

Condição de Dirichlet: u tem temperatura g na fronteira (Existência + Unicidade)

$$\begin{cases}\Delta u = 0\\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = g\end{cases}$$

Condição de Neumann: O fluxo de u na fronteira é $\frac{\partial u}{\partial n}$. (Existência se $\int g\,d\sigma = 0$ e Unicidade a não ser por soma de constante)

$$\begin{cases}\Delta u = 0\\ \frac{\partial u}{\partial n} + a u = g\end{cases}$$

Condição de Robin: O fluxo de u na fronteira é proporcional a $(u - \frac{1}{a}g)$. (Existência + Unicidade)

Observação: 1) $\frac{\partial u}{\partial n} + a(u - u_0) = 0$ é a lei de Newton do resfriamento.

2) $$\int_{\partial\Omega} g\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma \overset{\text{teorema do divergente}}{=} \int_{\partial\Omega} \nabla u\cdot n\,d\sigma = \int_{\Omega} \Delta u\,dx = 0.$$

Equação do Calor: Seja u a temperatura, então podemos ter

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x), & (t,x) \in]0,T[\times \Omega \\ u(0,x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(t,x) = h(t,x), & (t,x) \in]0,T[\times \partial\Omega \end{cases}$$

Equação da Onda: Seja u a componente de um campo elétrico, então podemos ter

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta u(t,x), & (t,x) \in]0,T[\times \Omega \\ u(0,x) = f(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & x \in \Omega \\ u(t,x) = h(t,x), & (t,x) \in]0,T[\times \partial\Omega \end{cases}$$

Podemos substituir $u(t,x) = h(t,x)$ pelas condições de Neumann e Robin também.

Operadores Diferenciais / EDP lineares (2ª aula)

Vamos lembrar um conceito de álgebra linear

Definição: Sejam E e F espaços vetoriais. Uma transformação linear $T: E \to F$ é uma função que satisfaz as seguintes condições:

1) $T(x+y) = T(x) + T(y), \ \forall x, y \in E$
2) $T(\alpha x) = \alpha T(x), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in E$ ($\forall \alpha \in \mathbb{C}$, se o espaço vetorial for complexo).

Também chamamos transformação linear de operador linear.

Definição: Um operador diferencial de 2º ordem é um operador L da forma

$$L(u) = a(x)u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Um operador de ordem ≥ 2 pode ser definido de forma análoga.

Teorema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Suponha que $a, b_j, c_{ij} \in C^\infty(\Omega)$. Logo um operador diferencial L com a forma acima define uma transformação linear $L: C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Antes de mais nada, lembremos que dizemos que uma função é de classe C^∞ (ou pertence a $C^\infty(\Omega)$) se todas as derivadas $\frac{\partial^j f}{\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_j}}$ estão definidas para todo j e são contínuas. É claro se f for C^∞, então suas derivadas tb são C^∞. Multiplicação de funções C^∞ também é uma função C^∞ (basta observar que $\frac{\partial}{\partial x_j}(af) = \frac{\partial a}{\partial x_j} f + a\frac{\partial f}{\partial x_j}$ e usar indução) e soma de funções C^∞ também é uma função C^∞ (usamos $\frac{\partial}{\partial x_j}(a+f) = \frac{\partial a}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j}$ e indução).

Logo se $u \in C^\infty(\Omega)$, então $L(u)(x) = a(x)u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \in C^\infty(\Omega)$

Por fim, seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(\Omega)$. Logo

$$L(\lambda f + g) = a(x)(\lambda f(x) + g(x)) + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda f + g) + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\lambda f + g) =$$

$$= \lambda\left(a(x)f + \sum_{j=1}^n b_j\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) + a(x)g(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_{ij}(x)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

$$= \lambda L(f) + L(g)$$

■

Observação: 1) Temos um número imenso de espaços de funções além do $C^\infty(\Omega)$. Poderíamos definir $L: C^{k+2}(\Omega) \to C^k(\Omega)$, para $k \in \mathbb{N}$.

2) Observamos que $C^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial. Portanto, a noção de transformação linear faz sentido.

Definição: 1) Uma equação diferencial parcial linear é uma equação da forma

$$L(u) = F,$$

em que L é um operador diferencial e u e F são funções em classes apropriadas (exemplo: são C^∞).

Dizemos que a equação linear acima é homogênea se $F = 0$ e não-homogênea se $F \neq 0$.

2) Uma equação diferencial parcial com condições de contorno é uma equação da forma

$$L(u) = F \quad \text{em } \Omega$$
$$B(u) = G \quad \text{em } \partial\Omega$$

em que B é, por exemplo, umas das condições vistas. Exemplo: $B(u) = u|_{\partial\Omega}$, $B(u) = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}$, $B(u) = (au + \frac{\partial u}{\partial n})\Big|_{\partial\Omega}$.

Novamente, dizemos que a equação é homogênea, se $F=0$ e $G=0$
não-homogênea, se $F\neq 0$ ou $G\neq 0$

Note que se a fronteira for suave, então uma equação diferencial linear com condições de contorno também é uma transformação linear

$$\begin{pmatrix} L \\ B \end{pmatrix} : C^\infty(\Omega) \to \begin{matrix} C^\infty(\Omega) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial\Omega) \end{matrix}$$

<u>Exemplo</u>: Denotemos $\gamma_0 : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\partial\Omega)$ por $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$. Logo

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma_0 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta u = F \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$ <u>Problema de Dirichlet</u>

Note que $\begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma_0 \end{pmatrix}(\lambda u + v) = \begin{pmatrix} \Delta(\lambda u + v) \\ (\lambda u + v)|_{\partial\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \Delta u + \Delta v \\ \lambda u|_{\partial\Omega} + v|_{\partial\Omega} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma_0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \Delta \\ \gamma_0 \end{pmatrix} v.$

<u>Observação</u>: Se Ω é um aberto com fronteira suave, podemos definir $C^\infty(\partial\Omega)$ como o espaço das restrições de funções $C^\infty(\Omega)$ em $\partial\Omega$.

<u>Por que tudo isto é importante?</u>

<u>Consequências</u>:

1) (Princípio da Superposição): Suponha que $u_1, \dots, u_n$ sejam soluções das equações $L(u_j) = f_j$ com condições de contorno $B(u_j) = g_j$. Logo $u := \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ é solução da equação $L(u) = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ com a condição de contorno $B(u) = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n$.

2) Se u_1 é solução de $L(u_1) = F$ com condição de contorno $B(u_1) = 0$ e u_2 é solução de $L(u_2) = 0$ com condição de contorno $B(u_2) = G$, então $u := u_1 + u_2$ é solução da equação $L(u) = F$ com condição de contorno $B(u) = G$.

3) O conjunto de todas as soluções do problema homogêneo $L(u) = 0$ e $B(u) = 0$ é um (sub-)espaço vetorial. Vamos denotá-lo por S_H. ($S_H \subset C^\infty(\Omega)$, por exemplo)

4) Seja v uma solução de $L(v) = f$ e $B(v) = g$. Logo as soluções do problema $L(u) = f$ e $B(u) = g$ são as funções da forma $u = v + w$, em que $w \in S_H$.

Demonstração:

1) Basta usar a linearidade para verificar que

$$L(u) = L(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 L(u_1) + \dots + \alpha_n L(u_n) = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$$

$$B(u) = B(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 B(u_1) + \dots + \alpha_n B(u_n) = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n .$$

2) É uma consequência direta de 1, já que

$$L(u) = L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) = F + 0 = F$$

$$B(u) = B(u_1 + u_2) = B(u_1) + B(u_2) = 0 + G = G .$$

3) Observamos que a função $u \equiv 0$ é solução de $L(u) = 0$ e $B(u) = 0$. Logo $u \equiv 0 \in S_H$.

Por fim, se $\lambda \in \mathbb{R}$, u_1 e $u_2 \in S_H$, então $\begin{array}{l} L(\lambda u_1) = \lambda L(u_1) = 0 \\ B(\lambda u_1) = \lambda B(u_1) = 0 \end{array}$ e $\begin{array}{l} L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) = 0 + 0 = 0 \\ B(u_1 + u_2) = B(u_1) + B(u_2) = 0 + 0 = 0 \end{array}$

Logo $\lambda u_1 \in S_H$ e $u_1 + u_2 \in S_H$

4) Se $u = v + w$, $w \in S_H$, então $\begin{array}{l} L(u) = L(v + w) = L(v) + L(w) = f + 0 = f \\ B(u) = B(v + w) = B(v) + B(w) = g + 0 = g \end{array}$.

Seja $\tilde{u}$ uma solução de $\begin{array}{l} L(\tilde{u}) = f \\ B(\tilde{u}) = g \end{array}$. Seja $w := -v + \tilde{u}$. Logo $\begin{array}{l} L(w) = -L(v) + L(\tilde{u}) = -f + f = 0 \\ B(w) = -B(v) + B(\tilde{u}) = -g + g = 0 \end{array}$. Portanto,

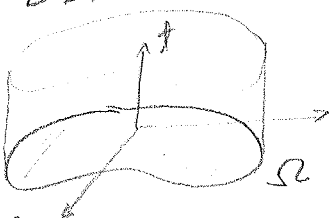
$w \in S_H$. Concluímos que $\tilde{u} = v + (\tilde{u} - v) = v + w$, com $w \in S_H$ ■

Método de Separação de Variáveis.

Vamos agora dar um método útil, ao menos em situações simples, para a resolução de EDP.

Ele consiste essencialmente em transformar uma EDP em várias EDO's.

Exemplificando: Equação do Calor:



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k \, \Delta u(t,x), & (t,x) \in \,]-T,T[\times \Omega \\ u(t,x) = 0 ; & (t,x) \in \,]-T,T[\times \partial\Omega \\ u(0,x) = f(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Se $n = 1$, estamos em uma dimensão. Logo Ω é um intervalo que tomaremos como $[0,l]$ (Note que $\partial\Omega = \{0,l\}$)

$$\begin{cases} u_t(t,x) = k \, u_{xx}(t,x), & (t,x) \in \,]-T,T[\times \,]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0 , & t \in \,]-T,T[\\ u(0,x) = f(x) , & x \in \,]0,l[\end{cases}$$

Como resolver a equação?

Vamos supor que $u(t,x) = T(t)X(x)$ (Eu separo as variáveis em 2 funções. Daí separação de variáveis ...).

Logo $u_t = k u_{xx} \Rightarrow T'(t)X(x) = k\,T(t)X''(x) \Rightarrow \boxed{\frac{T'(t)}{T(t)} = k\,\frac{X''(x)}{X(x)}}$

cálculo formal
supomos que podemos dividir por T e X.

Note que $\frac{d}{dt}\left(\frac{T'(t)}{T(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{X''(x)}{X(x)}\right) = 0$. Logo $\frac{T'(t)}{T(t)} = C$, uma constante

$\frac{d}{dx}\left(\frac{X''(x)}{X(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k}\,\frac{T'(t)}{T(t)}\right) = 0$. Logo $\frac{X''(x)}{X(x)}$ = constante que deve ser kC.

Assim, somos levados a resolver as equações $T'(t) = C\,T(t)$, $kX''(x) = C\,X(x)$. Mas isto é fácil!

Temos $T(t) = C_0 e^{Ct}$ e $X(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{-\frac{C}{k}}\,x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\frac{C}{k}}\,x\right)$.

Vamos agora determinar C_0, C_1, C_2 e C.

Sabemos que $u(t,0) = u(t,l) = 0$. Logo

$$C_0 e^{Akt}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{-\tfrac{C}{k}}\,0\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\tfrac{C}{k}}\,0\right)\right) = 0$$
$$C_0 e^{Akt}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{-\tfrac{C}{k}}\,l\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\tfrac{C}{l}}\,l\right)\right) = 0$$

Portanto, $C_1 = 0$

$C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{-\frac{C}{k}}\,l\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{C}{k}}\,l = n\pi \Leftrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{l}$, em que $\lambda = \sqrt{-\frac{C}{k}}$.

Logo $-\frac{C}{k} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \Rightarrow C = -k\,\frac{n^2\pi^2}{l^2}$

Concluímos que $u_n(t,x) = \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k t}{l^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ são soluções de $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \end{cases}$.

Por fim queremos que $u(0,x) = f(x)$. Mas $u_n(0,x) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$. Um jeito de resolver isto é somando u_n. Definimos $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(t,x)$ e determinamos c_n de tal maneira que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$.

Observações (Muitas):

1) Se $C > 0$, então $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{C}{k}}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{C}{k}}\,x}$ $\qquad \sqrt{\frac{C}{k}} =: \lambda$

Logo deveríamos ter

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{pmatrix} \neq 0$, concluímos que a única solução é $C_1 = C_2 = 0$, ou seja, $X(x) = 0$.

2) Precisamos estudar e entender a convergência da soma de funções.

3) Precisamos dar condições para que uma função possa ser escrita como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$.
(Série de Fourier!).

Conclusão: O método de separação de variáveis consiste em
1) Procurar por soluções da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$ (Ou mais geralmente, $u(t,x_1,\dots,x_n) = T(t)X(x_1)\cdots X(x_n)$)
2) Usar as condições de contorno para determinar as constantes que aparecem acima.
3) Somar as soluções usando as condições iniciais, determinando os coeficientes necessários. Por fim provamos que a soma converge para uma solução do problema.

Exemplo: Equação da Onda:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \Delta u(t,x) & , (t,x) \in]-T,T[\times \Omega \\ u(t,x) = 0 & , (t,x) \in]-T,T[\times \partial\Omega \\ u(0,x) = f(x) & , x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) & , x \in \Omega \end{cases}$$

Para $\Omega =]0,l[$, $\partial\Omega = \{0,l\}$, temos.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (t,x) \in]-T,T[\times]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0, & t \in]-T,T[\\ u(0,x) = f(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Passo 1) Achar soluções da forma: $u(t,x) = T(t)X(x)$

$$T''(t)X(x) = c^2 T(t) X''(x) \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda^2 = \frac{X''(x)}{X(x)}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Logo

$$\left.\begin{aligned} T''(t) &= -\lambda^2 c^2 T(t) \\ X''(x) &= -\lambda^2 X(x) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda x) \\ T(t) &= C_3 \cos(\lambda c t) + C_4 \operatorname{sen}(\lambda c t) \end{aligned}}$$

Passo 2) Uso Condições de Contorno para determinar as constante C_i.

$$u(t,0) = u(t,\ell) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_1 \cos(\lambda \ell) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda \ell) = 0 \end{array} \Bigg\}$$

$C_1 = 0$

Se $C_2 = 0$, então $u = 0$. Logo escolho λ t.q $\lambda \ell = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{\ell}$.

Assim, $u_n(t,x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}t\right)\right)$.

Passo 3) Uso condições iniciais para determinar a_n e b_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = f(x) \qquad (u(x,0) = f(x))$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = g(x) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)\right)$$

//

Série de Fourier

Objetivo: Escrever uma função $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ na forma

$$f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\theta)+b_n\operatorname{sen}(n\theta)\right).$$

Preparativos: Números Complexos (Eles ajudam!).

Existem várias formas de definirmos números complexos. Por exemplo

Definição: O conjunto dos números complexos é uma tupla $\mathbb{C}:=(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ em que

1) $+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é definido como $(a,b)+(c,d):=(a+c,b+d)$ (soma)

2) $\cdot:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é definido como $(a,b).(c,d):=(ac-bd,ad+bc)$ (multiplicação).

Usaremos a notação $z:=x+iy$ para denotar o par (x,y). Assim

$$i.i=-1\quad,\quad(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc).$$

A relação mais importante que vamos usar é $\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}\Rightarrow e^{-i\theta}=\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta\Rightarrow\boxed{\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \operatorname{sen}\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\end{array}}$

$$e^{i\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\theta)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}(i\theta)^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}(i\theta)^{2n+1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$$

Usei fórmula de Taylor.

Proposição: Toda função que pode ser escrita como $f(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta}$ também pode ser escrita como

$f(\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\operatorname{sen}(n\theta)$. Basta usar

$$\left.\begin{array}{l}c_0:=\frac{1}{2}a_0\\ c_n:=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\quad,n=1,2,3,\dots\\ c_{-n}:=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\end{array}\right|\begin{array}{l}a_0:=2c_0\\ a_n:=c_n+c_{-n}\quad,n=1,2,3,\dots\\ b_n:=i(c_n-c_{-n})\end{array}$$

Demonstração: 1) Suponha que $f(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta}$.

Logo $f(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c_n\cos(n\theta)+ic_n\operatorname{sen}(n\theta)\right)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\cos(n\theta)$

$$+i\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}(n\theta)+i\sum_{n=1}^{\infty}-c_{-n}\operatorname{sen}(n\theta)$$

$$= \underbrace{c_0}_{:=\frac{1}{2}a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(c_n + c_{-n})}_{:=a_n} \cos(n\theta) + i \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(c_n - c_{-n})}_{:=b_n} \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\theta).$$

2) Suponha que $f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\theta)$.

Logo $$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}a_0}_{:=c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)}_{:=c_n} e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + ib_n)}_{:=c_{-n}} e^{-in\theta} =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \qquad \blacksquare$$

$\downarrow$
$n \leftrightarrow -n$
no último soma

<u>Como calcular os coeficientes a_n, b_n e c_n?</u>

Vamos seguir fazendo cálculos formais. Seja $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$. Logo para $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta}\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)\theta}\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}\, d\theta =$$

Porém, $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}\, d\theta = 2\pi, \text{ se } n = k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}\, d\theta = \frac{1}{i(n-k)}\left(e^{i(n-k)\pi} - e^{-i(n-k)\pi}\right) = \frac{(-1)^{n-k} - (-1)^{n-k}}{i(n-k)} = 0, \text{ se } n \neq k$$

Logo $$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta}\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2\pi \delta_{nk} = 2\pi c_k.$$

Acima, usamos que $\delta_{nk} := \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq k \\ 1, & \text{se } n = k \end{cases}$. Esta função é chamada de <u>delta de Kronecker</u>.

<u>Nossa conclusão final é que:</u> 1) $$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta$$

2) $$a_0 := 2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$

$$a_n := c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta)\, d\theta$$

$$b_n := i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(e^{-in\theta} - e^{+in\theta})\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta$$

$$\boxed{c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta\,,\quad a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta\,,\quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta}$$

Definition: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função periódica de período 2π ($f(\theta+2\pi)=f(\theta)$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$). Suponha que f seja Riemann integrável em $[-\pi,\pi]$ ($\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f: [-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ são Riemann integráveis). Logo os coeficientes a_n, $n\geq 0$, b_n, $n\geq 1$ e c_n, $n\in\mathbb{Z}$ são chamados de coeficientes de Fourier.
A série de Fourier é, por definição, a série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\theta) + b_n\,\mathrm{sen}(n\theta)).$$

Precisamos agora provar convergência, unicidade e etc.
Algumas questões valem mencionar. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ periódica de período 2π e Riemann integrável. Logo temos:

P1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{a}^{a+2\pi} f(x)\,dx$, $\forall\, a\in\mathbb{R}$.

P2) Se f é par $\quad a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta$ e $b_n = 0$.

P3) Se f é impar $\quad a_n = 0$ e $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta$.

P4) $c_0 = \dfrac{1}{2}a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta$ é a média de f no intervalo $[-\pi,\pi]$.

Demonstração:

P1) Basta observar que se $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ é a função

$$F(t) := \int_{t}^{t+2\pi} f(x)\,dx$$

então $F(t) = \displaystyle\int_0^{t+2\pi} f(x)\,dx - \int_0^{t} f(x)\,dx$. Logo $\dfrac{dF}{dt}(t) = f(t+2\pi) - f(t) = 0$.

$y = x$

Assim F é constante. Logo $F(a) = F(-\pi) \Rightarrow \displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ ∎

P2) Se f é par $(f(\theta)=f(-\theta))$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta + \int_{-\pi}^{0} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta\right\} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(-\theta)\cos(-n\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta + \int_{-\pi}^{0} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta\right\} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f(-\theta)}_{f(\theta)}\underbrace{\mathrm{sen}(-n\theta)}_{-\mathrm{sen}(n\theta)}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta = 0.$$

P3) Se f é ímpar $f(\theta)=-f(\theta)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f(-\theta)}_{-f(\theta)}\underbrace{\cos(-n\theta)}_{\cos(n\theta)}\,d\theta = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f(-\theta)}_{-f(\theta)}\underbrace{\mathrm{sen}(-n\theta)}_{-\mathrm{sen}(n\theta)}\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta$$

P4) Ok

<u>Exemplo:</u> Calcule a série de Taylor de $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periódica de período 2π t.q. $g(\theta)=\theta$ para $\theta\in[-\pi,\pi]$.

<u>Resolução:</u>

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\,d\theta = 0 = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\theta\,d\theta + \int_{-\pi}^{0}\theta\,d\theta\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi}\theta\,d\theta - \int_0^{\pi}\theta\,d\theta\right\} = 0.$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\theta}_{u}\underbrace{e^{-in\theta}}_{v'}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\theta e^{-in\theta}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-in\theta}}{-in}\,d\theta\right\} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi e^{-in\pi}+\pi e^{in\pi}}{-in} + \frac{1}{in}\frac{e^{-in\theta}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right\} = \frac{1}{n}\,\frac{e^{in\pi}+e^{-in\pi}}{2(-i)} = \frac{i}{n}\cos(n\pi) = \frac{i(-1)^n}{n}.$$

$$\boxed{c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{in},\ n\neq 0,\ c_0=0}$$

Assim a série de Fourier é dada por

$$\hat{g}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{in\theta}$$

$a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$

Em termos de seno e cosseno, temos

$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{(-1)^{n+1}}{in} + \frac{(-1)^{-n+1}}{-in}\right]}_{=0} \cos(n\theta) + i\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{in} - \frac{(-1)^{-n+1}}{-in}\right] \operatorname{sen}(n\theta)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\theta)$$

Um pouco de intuição sobre os coeficientes:

Álgebra Linear: Seja V um espaço vetorial real (ou complexo). Um produto interno é uma função $\langle \cdot,\cdot \rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tal que

P1) $\langle x,x\rangle \geq 0$ e $=0 \Leftrightarrow x=0$

P2) $\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $\forall x,y\in V$

P3) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad (\overline{\langle y,x\rangle})$, $\forall x,y\in V$.

Uma base ortonormal é um conjunto $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, \dots\}$ t.q. $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ e $\forall x\in V$, $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$. Neste caso, $\langle x, e_k\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j, e_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{\delta_{jk}} = \alpha_k$.

Logo $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta};\ n\in\mathbb{Z}\}$ seria uma "base" ortonormal.

Muito Impreciso

Convergência das Séries de Fourier.

1º fato: Os coeficientes a_n, b_n e c_n convergem para 0.

Desigualdade de Bessel: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função periódica e Riemann integrável em $[-\pi,\pi]$. Se a_n, b_n e c_n são os coeficientes de Fourier de f, então

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2 d\theta.$$

Demonstração: Lembramos que se $z = a+ib \in \mathbb{C}$, então o seu complexo conjugado é definido como $\bar{z} := a - ib$. Logo $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iab + b^2 = a^2 + b^2 =: |z|^2$.

Observando que $|z|^2 \geq 0$, temos

$$0 \leq \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \right|^2 = \left(f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} \right)\left(\overline{f(\theta)} - \sum_{m=-N}^{N} \overline{c_m} e^{-im\theta} \right) =$$

$$|f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} \left(\overline{c_n} f(\theta) e^{-in\theta} + c_n \overline{f(\theta)} e^{in\theta} \right) + \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} c_n \overline{c_m} e^{i(n-m)\theta}$$

Vamos integrar tudo de $-\pi$ a π e dividir por 2π. Logo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{\overline{c_n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta + \frac{c_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(\theta)} e^{in\theta} d\theta \right) + \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} c_n \overline{c_m} \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta}^{\delta_{nm}} \geq 0$$

Portanto, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{n=-N}^{N} (\overline{c_n} c_n + c_n \overline{c_n}) + \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{c_n} \geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta}$$

Por fim, observamos que $a_0 := 2c_0$, $a_n := c_n + c_{-n}$, $b_n := i(c_n - c_{-n})$. Logo

$|a_0|^2 = 4|c_0|^2$, $|a_n|^2 = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 + 2c_n\overline{c_{-n}}$ e $|b_n|^2 = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 - 2c_n\overline{c_{-n}}$.

Assim, $\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$ ∎

Corolário: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica, Riemann integrável em $[-\pi, \pi]$. Logo seus coeficientes de Fourier satisfazem $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to-\infty} c_n = 0$

Demonstração: Como $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$, o resultado segue do fato das séries serem convergentes ∎

Vamos agora mostrar como as séries convergem.

O que quer dizer a convergência?

Definimos $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} := \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}$

Note que
$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{in\theta} = c_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(c_n e^{in\theta} + c_{-n}e^{-in\theta}\right) =$$
$$c_0 + \sum_{n=1}^{N}\left[(c_n + c_{-n})\cos(\theta n) + i(c_n - c_{-n})\operatorname{sen}(\theta n)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{N} b_n \operatorname{sen}(n\theta)$$

Assim, estamos interessados na convergência de
$$S_N^f(\theta) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{N} b_n\operatorname{sen}(n\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}.$$

Para isto vamos reescrever $S_N^f(\theta)$.

Proposição: Nas condições acima, $S_N^f(\theta) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\phi)D_N(\phi)\,d\phi$, em que
$$D_N(\phi) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}(N+\frac12)\phi}{\operatorname{sen}(\frac12\phi)} = \frac{e^{i(N+1)\psi} - e^{-iN\psi}}{e^{i\psi}-1}.$$

Demonstração: Basta observar que
$$S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta} = \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\psi} f(\psi)\,d\psi\right)e^{in\theta} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in(\theta-\psi)}\right)f(\psi)\,d\psi \underset{\tilde\psi=\psi-\theta}{=}$$
$$\int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta}\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{-in\psi}\right)f(\psi+\theta)\,d\psi = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}[(N+\frac12)\psi]}{\operatorname{sen}(\frac12\psi)}\right)f(\psi+\theta)\,d\psi = \int_{-\pi}^{\pi} D_N^f(\psi)f(\theta+\psi)\,d\psi.$$

Note que
$$\sum_{n=-N}^{N} e^{-in\psi} = e^{-iN\psi} + e^{-i(N-1)\psi} + \dots + e^{i(N-1)\psi} + e^{iN\psi} = e^{-iN\psi}\left(1 + e^{i\psi} + e^{i2\psi} + \dots + e^{i2N\psi}\right) =$$
$$= e^{-iN\psi}\left(1 + e^{i\psi} + (e^{i\psi})^2 + \dots + (e^{i\psi})^{2N}\right) = e^{-iN\psi}\frac{1-e^{i(2N+1)\psi}}{1-e^{+i\psi}} = \frac{e^{-iN\psi} - e^{i(N+1)\psi}}{1-e^{i\psi}}$$
$$= e^{\frac12\psi}\frac{e^{-i(N+\frac12)\psi} - e^{i(N+\frac12)\psi}}{1-e^{+i\psi}}\begin{cases} = \dfrac{e^{-i(N+\frac12)\psi} - e^{+i(N+\frac12)\psi}}{e^{-\frac12\psi} - e^{\frac12\psi}} = \dfrac{\operatorname{sen}(N+\frac12)\psi}{\operatorname{sen}(\frac12\psi)} \\[2ex] = \dfrac{e^{-iN\psi} - e^{i(N+1)\psi}}{1-e^{i\psi}} = \dfrac{e^{i(N+1)\psi} - e^{-iN\psi}}{e^{i\psi}-1} \end{cases}$$
∎

Agora vamos demonstrar algumas propriedades de D_N

Lema: Para todo $N\in\mathbb{N}$, temos
$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\theta)\,d\theta = \int_{0}^{\pi} D_N(\theta)\,d\theta = \frac12$$

Demonstração:

Vemos que $D_N(\theta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{N}\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta)$

Logo $\int_0^{\pi} D_N(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)\right)d\theta = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\,d\theta =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{\text{sen}(n\theta)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\Big(\underbrace{\text{sen}(n\pi)}_{0} - \underbrace{\text{sen}(-n\pi)}_{0}\Big) = \frac{1}{2}.$$

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{0}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)\right)d\theta = \int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(-n\theta)\right)d\theta = \int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)\right)d\theta$$

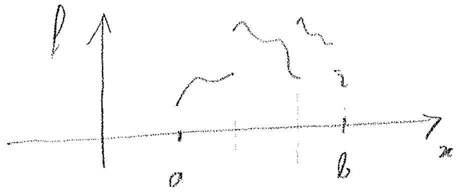
$$= \int_0^{\pi} D_N(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}$$ □

Para provar convergência, vamos exigir um pouco mais do que integrabilidade.

Definição: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua por pedaços, $f\in PC[a,b]$, se $\exists$ $a:=x_1<x_2<\dots<x_n:=b$ tais que

1) $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$ é contínua.

2) $\exists \lim_{x\to x_i^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_i^-} f(x)$. (Se $x_1=a$ só exigimos o limite à esquerda; Se $x_n=b$ só exigimos o limite à direita)



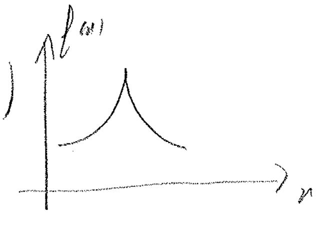
Definição: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dizemos que f é suave por pedaços, $f\in PS[a,b]$, se

1) $f\in PC[a,b]$

2) $\exists$ pontos $a:=x_1<x_2<\dots<x_n:=b$ tais que $f|_{]x_i,x_{i+1}[}$ é derivável, f' é contínua e existem os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, $\lim_{x\to b^-} f'(x)$, $\lim_{x\to x_i^+} f'(x)$, $\lim_{x\to x_i^-} f'(x)$, $i=1,\dots,n-1$.

Obs: 1) f não pode ter descontinuidade ∞. $\left(\frac{1}{x}\right)$

2) f não pode ter cusps (derivada infinita)



3) Dizemos que $f \in PS(\mathbb{R})$ ou $f \in PC(\mathbb{R})$ se $f|_{[a,b]} \in PS([a,b])$ ou $f|_{[a,b]} \in PC([a,b])$, respectivamente, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é 2π-periódica e suave por partes, então
$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}\left(f(\theta^-) + f(\theta^+)\right), \ \forall \theta.$$

Em particular, $\lim\limits_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = f(\theta)$ para todo θ em que f é contínua.

Demo: Vamos calcular $S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}\left(f(\theta^-) + f(\theta^+)\right)$:

$$S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}\left(f(\theta^-) + f(\theta^+)\right) = S_N^f(\theta) - \frac{1}{2} f(\theta^-) - \frac{1}{2} f(\theta^+) = \left(\text{uso } \frac{1}{2} = \int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)\,d\phi = \int_0^{\pi} D_N(\phi)\,d\phi\right)$$

$$= S_N^f(\theta) - f(\theta^-)\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)\,d\phi - f(\theta^+)\int_0^{\pi} D_N(\phi)\,d\phi =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} f(\theta+\phi) D_N(\phi)\,d\phi + \int_0^{\pi} f(\theta+\phi) D_N(\phi)\,d\phi - f(\theta^-)\int_{-\pi}^{0} D_N(\phi)\,d\phi - f(\theta^+)\int_0^{\pi} D_N(\phi)\,d\phi =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \left(f(\theta+\phi) - f(\theta^-)\right) D_N(\phi)\,d\phi + \int_0^{\pi}\left(f(\theta+\phi) - f(\theta^+)\right) D_N(\phi)\,d\phi =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta^-)}{e^{i\phi} - 1}\left(e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}\right)d\phi + \int_0^{\pi} \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta^+)}{e^{i\phi} - 1}\left(e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}\right)d\phi$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) e^{i(N+1)\phi}\,d\phi - \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) e^{-iN\phi}, \quad \text{em que } g(\phi) := \begin{cases} \dfrac{f(\theta+\phi) - f(\theta^-)}{e^{i\phi}-1}, & -\pi < \phi < 0 \\[2ex] \dfrac{f(\theta+\phi) - f(\theta^+)}{e^{i\phi}-1}, & 0 < \phi < \pi \end{cases}$$

Observemos que g é contínua por partes, pois f é contínua por partes e no ponto 0, onde $e^{i\phi} - 1 \to 0$, temos

$$\lim_{\phi\to 0^-} \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta^-)}{e^{i\phi} - 1} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{\phi\to 0^-} \frac{f'(\theta+\phi)}{i e^{i\phi}} = \frac{f'(\theta^-)}{i}.$$

$$\lim_{\phi\to 0^+} \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta^+)}{e^{i\phi} - 1} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{\phi\to 0^+} \frac{f'(\theta+\phi)}{i e^{i\phi}} = \frac{f'(\theta^+)}{i}$$

Concluímos que g tem os limites laterais em todos os pontos, inclusive no ponto 0. Por ser contínua por partes, vale a desigualdade de Bessel. Logo se c_N são os coeficientes de Fourier de g, então $\lim_{N \to \pm\infty} c_N = 0$.

Desta forma, temos

$$\lim_{N \to \infty} \left(S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}(f(\theta^+) + f(\theta^-)) \right) = \lim_{N \to \infty} 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) e^{i(N+1)\phi} d\phi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) e^{-iN\phi} d\phi \right)$$

$$= 2\pi \lim_{N \to \infty} \left(c_{-(N+1)} - c_N \right) = 0.$$

Exemplo de Aplicação:

Mostre que $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\right) = 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

Resolução:

Seja $f:]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ dado por $f(\theta) = \theta$. Logo

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\theta).$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta \cos(n\theta) d\theta = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\theta}_{u} \underbrace{\operatorname{sen}(n\theta) d\theta}_{v'} = \frac{1}{\pi} \left\{ -\theta \frac{\cos(n\theta)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) d\theta \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left\{ -\pi \cos(n\pi) - \pi \cos(-n\pi) \right\} = \frac{-2}{n} (-1)^n$$

Concluímos que $\theta = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\theta)$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, então temos

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} \operatorname{sen}(n\pi) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n-1} \operatorname{sen}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \pi = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n-1} (-1)^{n+1} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

$$\operatorname{sen}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$$

<u>Consequência Importante do Teorema:</u> Sejam f e g suaves por partes. Vamos supor que nos pontos de descontinuidade $f(\theta) = \frac{1}{2}(f(\theta^+) + f(\theta^-))$ e $g(\theta) = \frac{1}{2}(g(\theta^+) + g(\theta^-))$. Logo se f e g têm a mesma série de Fourier, então $f = g$. (Unicidade da Série de Fourier).

Integração e Derivação de Série de Fourier

<u>Queremos responder a questão:</u> Em que condições podemos derivar termo a termo a série de Fourier?

Vamos começar enunciando o Teorema fundamental do cálculo para funções contínuas e suave por partes.

<u>Lema:</u> Seja $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ contínua e suave por partes. Seja $f' : [a, b] \to \mathbb{C}$ a derivada de f. (definida a não ser por finitos pontos de $[a, b]$). Logo

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

Demonstração: Sejam $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ tais que $f'|_{]x_i, x_{i+1}[}$ é contínua.

Logo

$$f(b) - f(a) = f(x_n) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)\,dt = \int_a^b f'(t)\,dt$$

$\blacksquare$

Teorema: Suponha que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é 2π-periódica, contínua e suave por partes. Se a_n, b_n e c_n são os coeficientes de Fourier de f, a_n', b_n' e c_n' são os coeficientes de Fourier de f', então

$$a_n' = n b_n, \quad b_n' = -n a_n \quad \text{e} \quad c_n' = i n c_n.$$

Demonstração: Basta integrar por partes.

$$c_n' = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f'(\theta)}_{u'} \underbrace{e^{-in\theta}}_{v}\,d\theta = \underbrace{f(\theta) e^{-in\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, in\, e^{-in\theta}\,d\theta = in c_n.$$

Logo

$$a_n' = c_n' + c_{-n}' = in c_n - in c_{-n} = n i (c_n - c_{-n}) = n b_n.$$

$$b_n' = i(c_n' - c_{-n}') = i(in c_n + in c_{-n}) = -n(c_n + c_{-n}) = -n a_n$$

$\blacksquare$

Corolário: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função 2π-periódica, contínua e suave por partes. Suponha que que $f': \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ também seja suave por partes.

Se $$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)\right)$$

é a série de Fourier de f, então

$$f'(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n i n e^{in\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n a_n \operatorname{sen}(n\theta) + n b_n \cos(n\theta)\right)$$

nos pontos em que f' é contínua. Nos pontos de descontinuidade a soma acima é igual a $\frac{1}{2}\left(f'(\theta^+) + f'(\theta^-)\right)$, $f'(\theta^+) := \lim_{x \to \theta^+} f'(x)$ e $f'(\theta^-) := \lim_{x \to \theta^-} f'(x)$.

Demo: Como f' é suave por partes, então a sua série de Fourier converge a $\frac{1}{2}(f'(\theta^+)+f'(\theta^-))$. Porém os termos da série de f' são dados por $c_n' = i c_n$, $a_n' = n b_n$ e $b_n' = -n a_n$, pelo Teorema anterior. Logo segue o corolário. ∎

Agora vamos responder a questão: Em que condições podemos integrar termo a termo a série de Fourier?

Teorema: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função 2π-periódica, contínua por partes. Sejam a_n, b_n e c_n os coeficientes de Fourier de f. Se $F(\theta) := \int_0^\theta f(\phi)\,d\phi$ e se $c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\,d\phi = 0$, então para todo θ temos

$$F(\theta) = C_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta} = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\operatorname{sen}(n\theta) - \frac{b_n}{n}\cos(n\theta)\right),$$

em que $C_0 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\phi)\,d\phi$. (Logo a série de F é obtida integrando termo a termo a série de f). Se $c_0 \neq 0$, então

$$F(\theta) - c_0\theta = C_0 + \sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{in}e^{in\theta} = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\operatorname{sen}(n\theta) - \frac{b_n}{n}\cos(n\theta)\right).$$

Demonstração: Como f é contínua por partes, então F é contínua e suave por partes, já que F é integral de f. Além disso, F é 2π-periódica, pois

$$F(\theta+2\pi) - F(\theta) = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(\phi)\,d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\,d\phi = 0.$$

Logo $F(\theta) = C_0 + \sum_{n\neq 0} C_n e^{in\theta} = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos(n\theta) + B_n \operatorname{sen}(n\theta)\right)$

Como $f(\theta) = F'(\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)\right)$, concluímos, do Teorema de derivação termo a termo, que $a_n = nB_n$, $b_n = -nA_n$, $c_n = inC_n$. Logo $B_n = \frac{a_n}{n}$, $A_n = -\frac{b_n}{n}$, e $C_n = \frac{c_n}{in}$, $\forall n \neq 0$. Para $n=0$, temos

$$C_0 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\phi)\,d\phi$$ pela definição do coeficiente de Fourier de F.

Se $c_0 \neq 0$, então $f(\phi) - c_0$ é t.q. $\int_{-\pi}^{\pi}(f(\phi)-c_0)\,d\phi = 0$. Logo

$$F(\theta) - c_0\theta = \int_0^{\theta}(f(\phi)-c_0)\,d\phi = C_0 + \sum_{n\neq 0} C_n e^{in\theta} = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(n\theta) + B_n \operatorname{sen}(n\theta)\right),$$

com $B_n = \frac{a_n}{n}$, $A_n = -\frac{b_n}{n}$, $C_n = \frac{c_n}{in}$, $\forall n \neq 0$ e $C_0 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(F(\theta)-c_0\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\theta)d\theta$ ∎

<u>Exemplo:</u> $f(\phi) = \begin{cases} 1, & 0<\theta<\pi \\ -1, & -\pi<\theta<0 \end{cases}$ e $F(\theta) = |\theta|$. Logo $F(\theta) = \int_0^{\theta} f(\phi)\,d\phi$ e

$\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\,d\phi = 0$. Logo

$$f(\phi) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\theta}{2n-1}$$

$$F(\theta) = C_0 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}, \quad C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\theta|\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

∎

<u>Tipos de convergência</u>: Seja $S \subset \mathbb{R}$ um subconjunto e $(f_n)_n$ uma sequência de funções $f_n : S \to \mathbb{C}$ e $f : S \to \mathbb{C}$ também uma função. Dizemos que

1) f_n converge pontualmente a f se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in S$. ($\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \forall x \in S$)

2) f_n converge uniformemente a f se $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.

<u>Observação</u>: 1) Se f_n converge uniformemente a f, então converge pontualmente a f.

De fato, para $x \in S$ temos $0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in S} |f_n(x) - f(x)|$. Logo se

$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S} |f_n(x) - f(x)| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$, $\forall x \in S$.

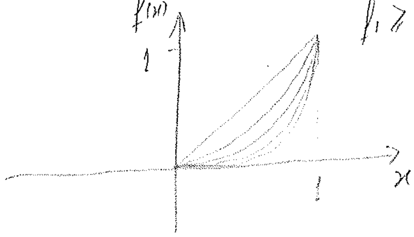
2) Convergência pontual não implica convergência uniforme.

De fato, seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$, e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1[\\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Logo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases} = f(x)$. Mas

$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$, pois $\lim_{x\to 1^-} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to 1^-} |x^n| = 1$. Logo $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0$.

$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq f_4 \ldots$



<u>Série</u>: Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência de funções $g_n : S \to \mathbb{C}$ e $g : S \to \mathbb{C}$ uma função.

Dizemos que

1) A série $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge pontualmente a g se $\left(\sum_{n=0}^{N} g_n\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ converge pontualmente a g, ou seja,

$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} g_n(x) = g(x)$, $\forall x \in S$

2) A série converge uniformemente a g se $\left(\sum_{n=0}^{N} g_n\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformemente a g, ou seja,

$\lim_{N\to\infty} \left(\sup_{x\in S} \left| g(x) - \sum_{n=0}^{N} g_n(x) \right| \right) = 0$.

3) Por fim, dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge absolutamente se $\exists \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |g_n(x)|$ para todo $x \in S$.

Observação: 1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge absolutamente, então $\exists\ g$ t.q. $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge pontualmente a g. De fato,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} g_n(x) - \sum_{n=0}^{M} g_n(x)\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{M} g_n(x)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{M} |g_n(x)| \xrightarrow{N,M\to\infty} 0.$$

Logo $\left(\sum_{n=0}^{N} g_n(x)\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ é de Cauchy. Portanto, converge.

Proposição: Seja $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ uma série de funções, em que $g_n : S \to \mathbb{C}$ são funções. Se $\exists (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ t.q. $M_n > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ e $|g_n(x)| \leq M_n$, então $\exists\ g : S \to \mathbb{C}$ t.q. $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge absolutamente e uniformemente a g (Teste-M de Weierstrass).

Demonstração: Convergência absoluta.

Temos $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$. Como $|g_n(x)| \geq 0$, concluímos que $\exists \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |g_n(x)|$.

Assim, $\exists\ g : S \to \mathbb{C}$ t.q. $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} g_n(x) = g(x)$.

Convergência uniforme.

Temos $\sup_{x\in S} \left|g(x) - \sum_{n=0}^{N} g_n(x)\right| = \sup_{x\in S} \left|\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) - \sum_{n=0}^{N} g_n(x)\right| = \sup_{x\in S} \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(x)\right| \leq$

$\sup_{x\in S} \sum_{n=N+1}^{\infty} |g_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n \xrightarrow{N\to\infty} 0$, pois $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$. $\blacksquare$

Teorema: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua, suave por partes e 2π-periódica. Logo a série de Fourier em seno, cosseno, em exponencial convergem absolutamente e uniformemente a f.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)). \qquad \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}.$$

Demonstração:

Basta aplicar o teste-M de Weierstrass, observando que

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{N} |a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)| \leq \left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{N}|a_n| + \sum_{n=1}^{N}|b_n|.$$

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n e^{in\theta}| \leq \sum_{n=-N}^{N}|c_n|$$

Assim, basta mostrar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| < \infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty$.

Porém, observemos que $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty$. Logo basta provar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| < \infty$.

($\Rightarrow$) Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| < \infty$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| = 2|c_0| + \sum_{n=1}^{\infty}|c_n + c_{-n}| \leq 2\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|\right) < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|i(c_n - c_{-n})| \leq 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| < \infty.$$

($\Leftarrow$) Se $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty$, então

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}|a_n - ib_n| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}|a_n + ib_n| < \sum_{n=0}^{\infty}|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty.$$

Sejam c_n' os coeficientes de Fourier de f'. Sabemos que $c_n = (in)^{-1}c_n'$ e que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n'|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(\theta)|^2 d\theta.$$ Logo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| = |c_0| + \sum_{n\neq 0}\left|\frac{c_n'}{n}\right| \leq |c_0| + \left(\sum_{n\neq 0}|c_n'|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < \infty. \quad \square$$

Observação: Se f é de classe C^2, então $c_n = (in)^{-1}c_n' = (in)^{-2}c_n''$ (c_n'' os coeficientes de f''). Logo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n c_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}c_n''\right| \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n''|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Assim, c_n cai mais rápido. Em geral, quanto mais regular for f, mais rápido os coeficientes de Fourier de f irão a zero.

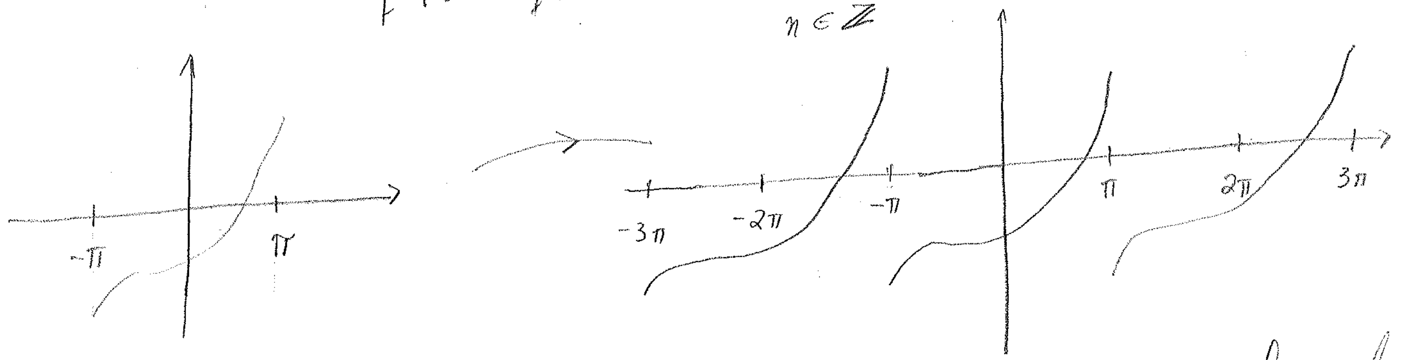
Série de Fourier em Intervalos

Vimos série de Fourier para funções 2π-periódicas. E em intervalos

1º Caso: $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$.

Suponha que tenhamos uma função definida em $[-\pi, \pi]$ e queremos escrevê-la em série de senos e cossenos. Uma forma de fazer é transformar a função em uma função periódica. Para isto ignoramos o ponto π ou $-\pi$ e definimos $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ t.q.

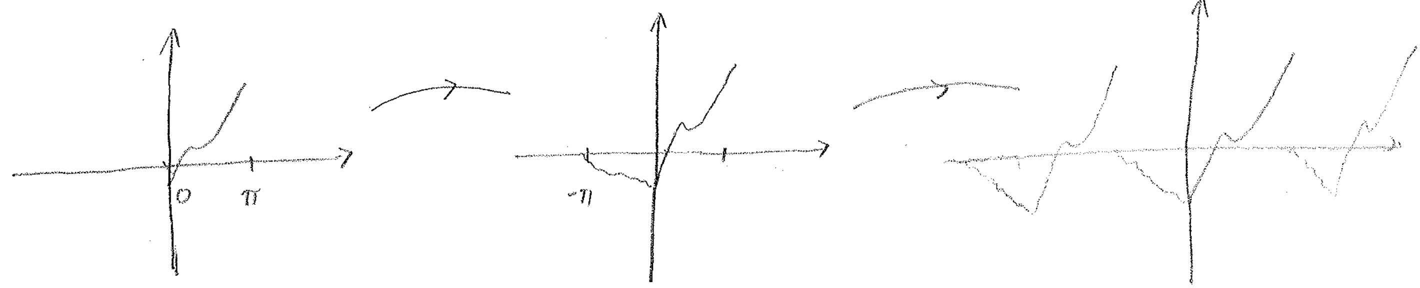
$$f(\theta) = \tilde{f}(\theta + 2n\pi), \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi[\ (\text{ou }]-\pi, \pi]), \ n \in \mathbb{Z}$$



Assim basta calcular a série de Fourier de $\tilde{f}$. Observamos que f suave por partes implica $\tilde{f}$ suave por partes. Mas $\tilde{f}$ pode ter descontinuidade em $(2n+1)\pi$, mesmo que f não tenha.

2º Caso $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$.

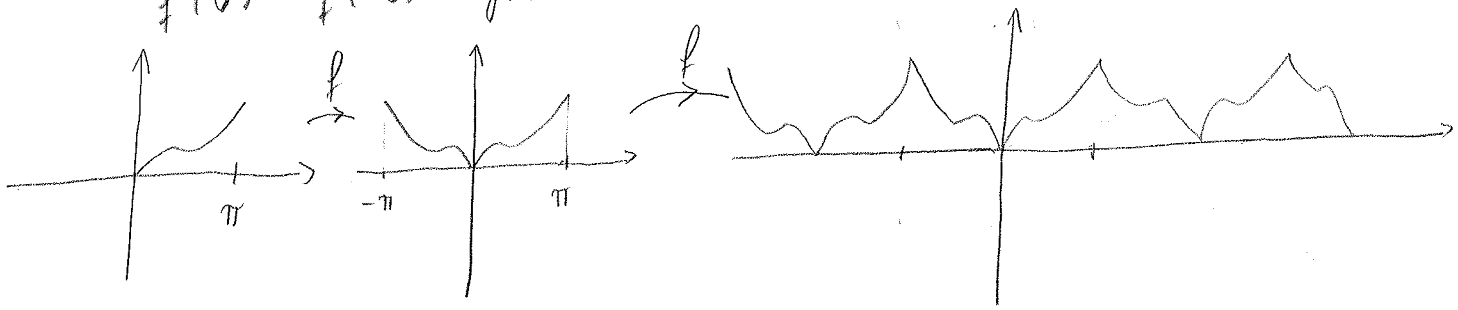
Neste caso estendemos f a uma função em $[-\pi, \pi]$ e depois a uma função periódica



Extensões Particulares (e Importantes)

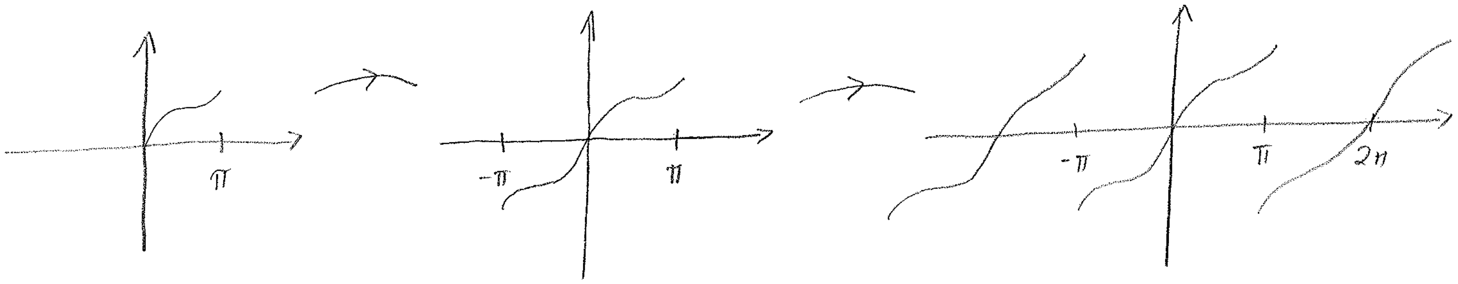
Extensão par

$$f(\theta) := f(-\theta) \quad \text{para} \quad \theta \in]-\pi, 0]$$



Extensão ímpar

$$f(\theta) := -f(-\theta) \quad \text{para} \quad \theta \in]-\pi, 0]$$



Vantagens da expansão par e ímpar:

Ao calcular a série de Fourier da extensão par temos $b_n = 0$ e $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta$

Logo

$$\boxed{f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) \quad , \quad a_n := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta}$$

Expansão em série de Fourier cosseno de $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$

Quanto à série de Fourier da extensão ímpar, temos $a_n = 0$ e $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta$

Logo

$$\boxed{f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}(n\theta) \quad , \quad b_n := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(n\theta)\,d\theta}$$

Expansão em série de Fourier seno de $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$

3º Caso $f: [0, L] \to \mathbb{C}$. (e $f: [-L, L] \to \mathbb{C}$)

Neste caso, estendemos $f: [0, L] \to \mathbb{C}$ a uma função $f: [-L, L] \to \mathbb{C}$ e depois a uma função periódica de período $2L$.

Observamos que se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é periódica de período $2L$, então $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\tilde{f}(x) = f\left(\frac{L}{\pi} x\right)$ é periódica de período $\frac{2L}{\left(\frac{L}{\pi}\right)} = 2\pi$.

Logo $$\tilde{f}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\theta),$$

ou seja, $$f(x) = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{L} x\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

em que $$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) e^{-inx} dx, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

Assim, $$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} x\right) e^{-inx} dx \underset{\substack{y = \frac{L}{\pi} x \\ dy = \frac{L}{\pi} dx}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-i\frac{n\pi}{L} y} \frac{\pi}{L} dy = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(y) e^{-i\frac{n\pi}{L} y} dy.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} x\right) \cos(nx) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} x\right) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

Em particular, temos para $f: [0, L] \to \mathbb{C}$:

<u>Expansão seno:</u> $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, em que $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

<u>Expansão cosseno:</u> $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, em que $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

Aplicações:

Equação do Calor revisto:

Consideremos a seguinte equação (EC) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), & (t,x)\in]0,T[\times]0,\ell[\\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & \forall t>0 \\ u(x,0) = f(x), & x\in[0,\ell]. \end{cases}$

Teorema: Seja $f \in PS[0,\ell]$. Logo existe uma única função $u \in C^\infty(]0,T[\times]0,\ell[)\cap C(]0,T[\times[0,\ell])$ t.q.

1) $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$, $(t,x)\in]0,T[\times]0,\ell[$.

2) $u(0,t) = u(\ell,t)$, $\forall t>0$.

3) $u(x,0) = f(x)$.

4) $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$, $\lim_{x\to 0} u(x,t) = \lim_{x\to \ell} u(x,t) = 0$, $t>0$.

Além disso, $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k t}{\ell^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, $b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$.

Demonstração:

Vamos usar o seguinte lema:

Lema: Sejam $(u_n:\Omega\to\mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}_0}$ de classe C^∞ tais que u_n converge uniformemente a u. Se as derivadas de u_n de ordem $\leq k$ convergem uniformemente, então $u\in C^k(\Omega)$, e as derivadas de u são iguais ao limite das derivadas de u_n. Se $(u_n:\overline{\Omega}\to\mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformemente a u, então $u\in C(\overline{\Omega})$. (Em particular para séries temos $\frac{\partial}{\partial x}\sum = \sum\frac{\partial}{\partial x}$).

Seja $v_n(t,x) = b_n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$, $b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$ $(b_n\in\ell_\infty)$.

Assim, $v_n \in C^\infty(]0,T[\times]0,\ell[)\cap C(]0,T[\times[0,\ell])$.

$$\left|\left(\frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^l}{\partial x^l}u_n\right)(t,x)\right| = \left|b_n\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2}\right)^j\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^l\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2}t\right)\underset{\cos}{\operatorname{sen}}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right|$$

$$\leq C n^{2j+l}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2}\varepsilon\right) \quad \text{e}$$

$|b_n|\leq C$

$\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2}t\right)\leq \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2}\varepsilon\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C n^{2j+l}\underbrace{\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2}\varepsilon\right)}_{\leq \frac{1}{n^{2j+l}}\frac{1}{n^2}} < \infty$$

Logo se $u_n = \sum_{j=1}^{n} v_j$, então u_n e todas as suas derivadas convergem uniformemente para $\varepsilon > 0$. Logo $u \in C^\infty(]\varepsilon, T[\times]0,l[) \cap C(]\varepsilon, T[\times[0,l])$, $\forall \varepsilon > 0$.

Portanto, $u \in C^\infty(]0,T[\times]0,l[) \cap C(]0,T[\times[0,l])$

Agora, vemos que

1) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial v_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} k \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

2) $u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0,t) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(l,t) = u(l,t)$

3) $u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$ (expansão em seno de f).

4) Os limites $x \to 0$ e $x \to l$ são corretos, já que $u \in C(]0,T[\times[0,l])$.

$\lim_{t \to 0} u(t,x) = f(x)$ é delicado!

Se f é contínua e $f(0) = f(l) = 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$. Logo $u \in C([0,T[\times[0,l])$. Portanto segue a convergência. (Neste caso $\sum_{j=1}^{n} v_j$ converge a u pelo critério de Weierstrass uniformemente $\forall (t,x) \in [0,T[\times[0,l]$).

<u>Equação da Onda revista</u>

Consideremos (E Onda)
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), & (t,x) \in]0,T[\times]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0, & t > 0 \\ u(0,x) = f(x), & x \in]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & x \in]0,l[\end{cases}$$

Da mesma forma que anteriormente, vemos que

A solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left(b_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) + \frac{l B_n}{n\pi c} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)\right)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \quad e \quad B_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

Se supormos f de classe C^3 e g de classe C^2 com f''' e g'' suave por pedaços, e se f, g, f'' e g'' se anulam em 0, l, então

$$|b_n| \leq C n^{-4} \quad e \quad |B_n| \leq C n^{-3}.$$

Logo, se $v_n(t,x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(b_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + \frac{l B_n}{n\pi c}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right)$, temos

$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right\| < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right\| < \infty$, em que $\|h\| := \sup_{(t,x)\in[0,T]\times[0,l]} |h(t,x)|$. Logo teorema de Weierstrass concluímos que

1) $u \in C^2([0,T[\times[0,l])$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right) = 0$

3) $u(t,0) = u(t,l) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\to l}} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(l,t) = 0.$

4) $u(0,x) = \lim_{t\to 0} u(t,x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \lim_{t\to 0} u(t,x) = \sum_{l=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = g(x)$

Interessante: Usando $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$, $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

temos

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\right] + \frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l B_n}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[G(x+ct) - G(x-ct)\right], \quad \frac{dG}{dx} = g.$$

Problema de Neumann (+ 1 exemplo!).

Vamos resolver a equação do calor com condições de Neumann.

Problema geral em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\Delta u(t,x), & (t,x) \in]0,\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) = 0, & (t,x) \in]0,\infty[\times \partial\Omega \\ u(0,x) = f(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Em 1 dimensão fica $\Omega =]0,l[$. Logo
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), & (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[. \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0, & t \in]0,\infty[\\ u(0,x) = f(x), & x \in]0,l[\end{cases}$$

Passo 1) Procurar soluções da forma: $u(t,x) = T(t)X(x)$

$$T'(t)X(x) = kT(t)X''(x) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)} \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = C, \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = Ck,$$

C uma constante.

Vamos supor que $C = -\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (Se $C > 0$, então não poderemos obter $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0$)

Assim, $\left.\begin{array}{l} X''(x) = -\lambda^2 X(x) \\ T'(t) = -\lambda^2 k T(t) \end{array}\right\}$ $\boxed{\begin{array}{l} X(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda x) \\ T(t) = C_3 e^{-\lambda^2 k t} \end{array}}$

Logo $\boxed{u_\lambda(t,x) = e^{-\lambda^2 k t}\left(C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda x)\right)}$

Passo 2) Uso as condições de contorno para determinar λ.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = e^{-\lambda^2 k t}\left(-C_1 \lambda \operatorname{sen}(\lambda x) + C_2 \lambda \cos(\lambda x)\right). \text{ Logo}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda^2 k t} C_2 \lambda = 0 \Rightarrow C_2 \lambda = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ ou } \lambda = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda^2 k t}\left(-C_1 \lambda \operatorname{sen}(\lambda l)\right) = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi, n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{l}, n \in \mathbb{N}_0$$

Assim $u_n(t,x) = C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$. (Note que inclui o caso $\lambda = 0$, que corresponde a $n = 0$).

Passo 3) Escrevo a solução como uma soma e uso a condição inicial para determinar C_n.

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \, e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}kt} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Logo $u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = f(x)$.

Usando nosso conhecimento de série de Fourier sabemos que se $f \in PS[0,\ell]$, então podemos expandir f numa série de cosseno e obter que

$$C_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(x)\,dx \qquad , \quad C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx, \quad n>0.$$

Usando o teste de Weierstrass, o rápido decaimento do termo $e^{-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2}t}$

Teorema: Seja $f \in PS[0,\ell]$. Logo existe uma única função $u \in C^\infty(]0,\infty[\times[0,\ell])$ t.q.

1) $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$, $\quad (t,x) \in]0,\infty[\times]0,\ell[$.

2) $u(t,0) = u(t,\ell)$, $\quad \forall t>0$

3) $u(t,0) = f(x)$

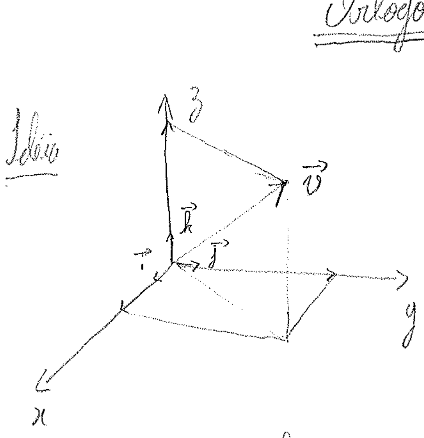
4) $\lim_{t\to 0} u(t,x) = f(x)$.

A solução u é dada por

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(y)\,dy + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(y)\cos\left(\frac{n\pi y}{\ell}\right)dy\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}kt}\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)}$$

Ortogonalidade

Ideia



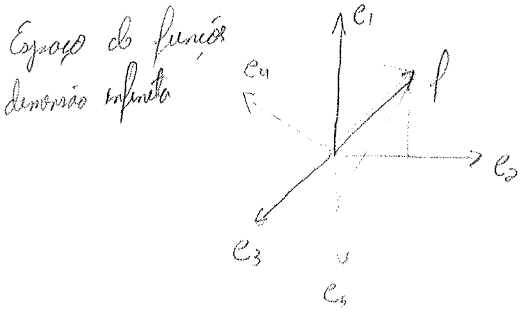
$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, em que

$$\left.\begin{aligned} x &= \vec{v}\cdot\vec{\imath} \\ y &= \vec{v}\cdot\vec{\jmath} \\ z &= \vec{v}\cdot\vec{k} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{v}\cdot\vec{\jmath})\vec{\jmath} + (\vec{v}\cdot\vec{k})\vec{k}. \\ &\vec{a}\cdot\vec{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \end{aligned}$$

Seja $\vec{v}$ um vetor em $\mathbb{R}^3$. Então $\vec{v}$ pode ser escrito usando os vetores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

O que isto tem a ver com série de Fourier???

<u>Idéia</u>: Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $e_k = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$. Logo



$$f = (f \cdot e_1) e_1 + (f \cdot e_2) e_2 + \dots$$

$$f \cdot e_j := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e_j(x)}\, dx.$$

Análogo a $\mathbb{R}^3$!

Precisamos formalizar a idéia. Ela é muito importante, por isso daremos uma breve introdução a ela neste curso.

<u>Um pouco de álgebra linear ...</u>

Como estamos usando e^{ikx} precisamos lidar com espaços vetoriais complexos. Vamos começar definindo produto interno (escalar).

<u>Definição</u>: Seja V um espaço vetorial complexo. Um produto interno em V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

P1) $\langle \alpha v + \beta w, z \rangle = \alpha \langle v, z \rangle + \beta \langle w, z \rangle$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall v, w, z \in V$. (Linearidade na 1ª entrada)

P2) $\langle z, \alpha v + \beta w \rangle = \bar{\alpha} \langle z, v \rangle + \bar{\beta} \langle z, w \rangle$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall v, w, z \in V$. (Conjugado linear na 2ª entrada)

P3) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

P4) $\langle v, v \rangle \geq 0$, $\forall v \in V$, $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Uma norma $\|\cdot\| : V \to [0, \infty[$ associada ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a função

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

<u>Exemplo 1</u>: (Mais Importante): Seja $\mathbb{C}^n$ o conjunto de n-uplas $(z_1, \dots, z_n)$, $z_j \in \mathbb{C}, \forall j$

$\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial com as operações

$$z + w = (z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n) := (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n)$$

$$\alpha z = \alpha(z_1, \dots, z_n) := (\alpha z_1, \dots, \alpha z_n), \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

O produto interno canônico é, por definição,

$$\langle z, w \rangle := z_1 \overline{w_1} + \dots + z_n \overline{w_n} = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}.$$

Note que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é produto interno, pois

P1) $\langle \alpha z + \beta w, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} (\alpha z_j + \beta w_j) \overline{y_j} = \alpha \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{y_j} + \beta \sum_{j=1}^{n} w_j \overline{y_j} = \alpha \langle z, y \rangle + \beta \langle w, y \rangle.$

P2) $\langle y, \alpha z + \beta w \rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j \overline{(\alpha z_j + \beta w_j)} = \overline{\alpha} \sum_{j=1}^{n} y_j \overline{z_j} + \overline{\beta} \sum_{j=1}^{n} y_j \overline{w_j} = \overline{\alpha} \langle y, z \rangle + \overline{\beta} \langle y, w \rangle$

P3) $\overline{\langle z, w \rangle} = \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j} \right)} = \sum_{j=1}^{n} w_j \overline{z_j} = \langle w, z \rangle$

P4) $\langle z, z \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j} = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow z_j = 0, \forall j \Leftrightarrow z = 0.$

A norma associada a este produto é $\|z\| := \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right)^{1/2}.$

Exemplo 2: (Importante para nós). Seja $PC[a,b]$. Vamos assumir que se x é um ponto de descontinuidade de uma função $f \in PC[a,b]$, então $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$. Podemos definir o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : PC[a,b] \times PC[a,b] \to \mathbb{C}$ por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

P1) $\langle \alpha f + \beta h, g \rangle = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta h(x)) \overline{g(x)}\, dx = \alpha \int_a^b f(x) \overline{g(x)}\, dx + \beta \int_a^b h(x) \overline{g(x)}\, dx = \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle h, g \rangle.$

P2) $\langle g, \alpha f + \beta h \rangle = \int_a^b g(x) \overline{(\alpha f(x) + \beta h(x))}\, dx = \overline{\alpha} \int_a^b g(x) \overline{f(x)}\, dx + \overline{\beta} \int_a^b g(x) \overline{h(x)}\, dx = \overline{\alpha} \langle g, f \rangle + \overline{\beta} \langle g, h \rangle$

P3) $\overline{\langle f, g \rangle} = \overline{\left(\int_a^b f(x) \overline{g(x)}\, dx \right)} = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx = \int_a^b g(x) \overline{f(x)}\, dx = \langle g, f \rangle$

P4) $\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0$ e $= 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ nos pontos de continuidade. Nas descontinuidades

Temos $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = 0$.

A norma associada ao produto interno é dada por $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$.

—— // ——

E ortogonalidade? O que é?

Definição: Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$. Um conjunto $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ é chamado de ortogonal se $v_j \neq 0, \forall j$, e $\langle v_j, v_k \rangle = 0, \forall j \neq k$.

Um conjunto $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ é chamado de ortonormal se for ortogonal e $\|v_j\| = \sqrt{\langle v_j, v_j \rangle} = 1, \forall j$.

Observamos que $\{v_1, \dots, v_m\}$ é ortonormal $\Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$

Se $W \subset V$ é um subconjunto infinito de V, então dizemos que W é ortogonal/ortonormal se todo subconjunto finito de W for ortogonal/ortonormal.

Vamos lembrar o conceito de base. Vamos definir, por enquanto, apenas em $\mathbb{C}^n$.

Definição: Uma base $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ de $\mathbb{C}^n$ é um conjunto de vetores em $\mathbb{C}^n$ tais que

1) B é linearmente independente (L.I.): $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

2) B gera $\mathbb{C}^n$: $\forall v \in \mathbb{C}^n, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$ t.q. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$.

Propriedades: 1) Se B é base de $\mathbb{C}^n$, então $m = n$.

2) Todo conjunto L.I. de n elementos é base de $\mathbb{C}^n$.

3) Todo conjunto que gera $\mathbb{C}^n$ com n elementos é base de $\mathbb{C}^n$.

Definição: Dizemos que uma base B é ortogonal (ou ortonormal) se B for uma base e B é um conjunto ortogonal (ou ortonormal).

Certamente uma das propriedades mais importantes de bases ortonormais é a seguinte:

__Teorema:__ Seja $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Assim, para todo $v \in \mathbb{C}^n$, temos

$$v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \ldots + \langle v, u_n\rangle u_n = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j\rangle u_j .$$

$$\|v\|^2 = |\langle v, u_1\rangle|^2 + \ldots + |\langle v, u_n\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle v, u_j\rangle|^2 .$$

__Demonstração:__ Como $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathbb{C}^n$, sabemos que existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$v = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n .$$

Vamos determinar a_j. Basta fazer o produto escalar de u_j com v. De fato, obtemos

$$\langle v, u_j\rangle = \langle a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n , u_j\rangle = a_1 \underbrace{\langle u_1, u_j\rangle}_{\delta_{1j}} + \ldots + a_n \underbrace{\langle u_n, u_j\rangle}_{\delta_{nj}} =$$

$$= a_j \langle u_j, u_j\rangle = a_j . \quad \text{Logo } \boxed{a_j = \langle v, u_j\rangle}.$$

Assim, $v = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = \langle v, u_1\rangle u_1 + \ldots + \langle v, u_n\rangle u_n$.

Vamos agora achar $\|v\|^2$. Pela definição, temos

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j\rangle u_j , \sum_{k=1}^{n} \langle v, u_k\rangle u_k \right\rangle =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle v, u_j\rangle \overline{\langle v, u_k\rangle} \underbrace{\langle u_j, u_k\rangle}_{\delta_{jk}} = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j\rangle \overline{\langle v, u_j\rangle} = \sum_{j=1}^{n} |\langle v, u_j\rangle|^2 \quad \blacksquare$$

__Exemplo:__ Em $\mathbb{C}^n$, seja $u_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $u_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $u_3 = (0,0,1,\ldots,0), \ldots$

Logo $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base ortonormal. De fato

- Se $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, então $v = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$. (Gera $\mathbb{C}^n$)
- Se $a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = 0$, então $(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$. Logo $a_j = 0, \forall j$ (é L.I).

... Por fim $\langle u_j, u_k \rangle = \delta_{jk}$.

Neste caso, vemos que

$$\langle (a_1, \dots, a_n), u_j \rangle = \langle (a_1, \dots, a_n), (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ésimo caso}}}{1}, 0, \dots, 0) \rangle = a_j.$$

Logo $v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n$

$$\|v\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 = |\langle v, u_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, u_n \rangle|^2.$$

E para funções?

Vimos que podemos definir um produto interno em $PC[a,b]$ (funções contínuas por partes $f : [a,b] \to \mathbb{C}$) por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

A norma é dada por $\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$. Assim é mais conveniente trabalhar com $L^2([a,b])$, definido abaixo:

Definição: O conjunto $L^2([a,b])$ é o conjunto das funções (*) $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ tais que

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty. \text{ (Dizemos que } f \text{ é quadrado integrável).}$$

Neste conjunto, identificamos como iguais as funções f e g que satisfazem $\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$.

Claramente, temos $PC[a,b] \subset L^2([a,b])$, pois toda função contínua por partes é quadrado integrável.

(*) Se fôssemos bastante rigorosos deveríamos falar em funções mensuráveis e integrais de Lebesgue.

Em particular, no espaço $L^2(-\pi,\pi)$, as funções $\phi_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ dadas por

$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ são ortonormais, pois

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\overline{\phi_n(x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} e^{i(m-n)x}\,dx = \begin{cases} 1, & \text{se } m=n \\ \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

Além disso, $\langle f, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\phi_n(x)}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} c_n = \sqrt{2\pi}\, c_n$

Logo, se $f \in PS[-\pi,\pi]$, vemos que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f,\phi_n\rangle\right)\left(\sqrt{2\pi}\,\phi_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle \phi_n(x).$$

Assim temos: Para $v \in \mathbb{C}^n$ e $\{u_1,\dots,u_n\}$ base de $\mathbb{C}^n$ $\boxed{v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j\rangle u_j}$

Para $f \in PS[-\pi,\pi]$ e $\{\phi_1,\phi_2,\dots\}$ dado por $\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, temos

$$\boxed{f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \phi_n}$$

Para intervalo $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ ($f:[0,L]\to\mathbb{C}$ é o mesmo), temos

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi}}, & \text{se } n=0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx), & \text{se } n>0 \end{cases}$$ é um conjunto ortonormal, pois

$$\int_0^{\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2 dx = \pi \quad , \quad \int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\cos^2(nx)\,dx = \int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\left(1+\cos(2nx)\right)dx = 1.$$

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} = 0 \quad \text{e}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)\right]dx = 0 \quad \text{se } m \neq n.$$

Logo esperamos que $f = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j$. De fato

$$\langle f, \phi_j \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \cos(jx)\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi}{2} a_j = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_j, \quad j > 0$$

$$\langle f, \phi_0 \rangle = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2} a_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_0$$

Logo $f = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(jx) =$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$ Série de Fourier Cosseno!

Por fim, se $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(nx)$, então ϕ_n é um conjunto ortonormal e

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$ é série de Fourier seno.

Assim, parece adequado chamar as funções $\{\phi_n\}_n$ de base do espaço vetorial $L^2([-\pi, \pi])$ ou $L^2([0, \pi])$. Vamos formalizar isto estudando a convergência no sentido L_2 (definido abaixo)

Convergência em L_2

Até agora estudamos convergência pontual, absoluta e uniforme. Existe outros tipos de convergência muito úteis. Vamos a seguir estudar convergência em L_2

Definição: Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ uma sequência de funções em $L_2([a,b])$ e $f \in L^2([a,b])$.

Dizemos que f_n converge a f em L^2 se

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_{L^2([a,b])} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\int_a^b | f_n(x) - f(x) |^2 dx} = 0.$$

Observações:

1) Convergência uniforme implica convergência em L_2.

<u>Dem:</u> Suponha que $f_n \to f$ uniformemente, ou seja, $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

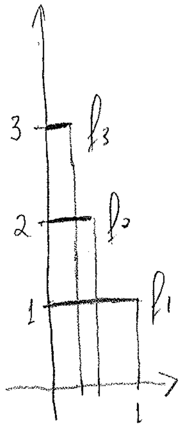
Logo $f_n \to f$ em L_2, pois

$$\|f_n - f\|_{L_2}^2 = \int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2 dx \leq \left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|\right)^2 \int_a^b dx = (b-a)\left(\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\boxed{q}$

2) Convergência pontual <u>não</u> implica convergência em L_2.

<u>Exemplo</u> Seja $f_n :]0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $f_n(x) := \begin{cases} n, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

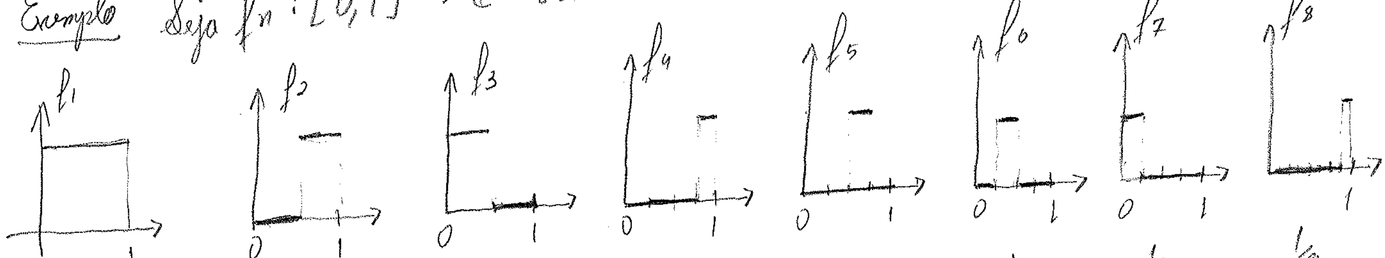


Logo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \ \forall x \in]0,1[$.

Mas $\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_{L_2}^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/n} n^2 dx = \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

3) Convergência em L_2 <u>não</u> implica convergência pontual.

<u>Exemplo</u> Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada abaixo



Norma L_2: 1, $1/2$, $1/2$, $1/4$, $1/4$, $1/4$, $1/4$, $1/8$

Logo $\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_{L_2} = 0$. No entanto, $f_n(x)$ fica oscilando entre 0 e 1 para todo x. Logo $f_n(x)$ não converge para nenhum x.

E quanto a norma?

Vimos que em $\mathbb{C}^n$, se $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ é base de $\mathbb{C}^n$ e $u \in \mathbb{C}^n$, então

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \sum_{j=1}^{n} |\langle u, u_j\rangle|^2.$$

- Se tomarmos um conjunto ortonormal de $L^2([a,b])$ dado por $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, então quando é que é verdade que $\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^b f(x)\overline{\phi_n(x)}\, dx \right|^2$?

Vamos começar demonstrando que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2$ sempre que $f \in L^2([a,b])$. Esta é chamada desigualdade de Bessel (de novo!). De fato, se $\phi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$, $n \in \mathbb{Z}$, $[a,b] = [-\pi,\pi]$, então

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2 \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\phi_n(x)}\, dx \right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Retomamos, assim a desigualdade de Bessel original.

<u>Proposição</u>: <u>Desigualdade de Bessel</u>. Seja $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ um conjunto ortonormal de $L^2(a,b)$ e $f \in L^2(a,b)$. Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

<u>Demonstração</u>: Para todo $N \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$, temos

$$0 \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n \right\|^2 = \left\langle f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n,\ f - \sum_{m=1}^{N} \langle f, \phi_m\rangle \phi_m \right\rangle =$$

$$\langle f, f\rangle - \left\langle f, \sum_{m=1}^{N} \langle f, \phi_m\rangle \phi_m \right\rangle - \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n, f \right\rangle + \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n, \sum_{m=1}^{N} \langle f, \phi_m\rangle \phi_m \right\rangle =$$

$$\langle f, f\rangle - \sum_{m=1}^{N} \overline{\langle f, \phi_m\rangle} \langle f, \phi_m\rangle - \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\langle f, \phi_n\rangle \langle \phi_n, f\rangle}_{\substack{= \langle f, \phi_n\rangle \overline{\langle f, \phi_n\rangle} \\ = |\langle f, \phi_n\rangle|^2}} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \langle f, \phi_n\rangle \overline{\langle f, \phi_m\rangle} \underbrace{\langle \phi_n, \phi_m\rangle}_{\delta_{nm}} =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{m=1}^{N} |\langle f,\phi_m\rangle|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f,\phi_n\rangle|^2 + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \langle f,\phi_n\rangle\overline{\langle f,\phi_n\rangle}}_{\sum_{n=1}^{N} |\langle f,\phi_n\rangle|^2}$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle f,\phi_n\rangle|^2. \quad \text{Logo} \quad \|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{N} |\langle f,\phi_n\rangle|^2.$$

Tomando $\lim_{N\to\infty}$, obtemos $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f,\phi_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2$

<u>Observação</u>: O mesmo argumento acima implica que se $\{\phi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ é um conjunto ortonormal, então $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f,\phi_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2$.

<u>E quando vale afinal $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f,\phi_n\rangle|^2$?</u>

Resposta: Nas seguintes condições do Teorema abaixo:

<u>Teorema</u>: Seja $B=\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ um conjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Logo equivalem as afirmações:

c) 1) Para todo $f \in L^2(a,b)$, vale $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f,\phi_n\rangle|^2$. (Chamamos de igualdade de Parseval).

b) 2) Para todo $f \in L^2(a,b)$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \phi_n$ converge em L_2 para f.

a) 3) Todo $f \in L^2(a,b)$ que satisfaz $\langle f,\phi_n\rangle = 0$, $\forall n$, é igual a 0, ou seja, $\langle f,\phi_n\rangle = 0, \forall n \Rightarrow f = 0$.

<u>Demonstração</u>:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

2) $\Rightarrow$ 1)

Assim vemos que $\|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \phi_n , \sum_{m=1}^{\infty} \langle f,\phi_m\rangle \phi_m \right\rangle =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \overline{\langle f,\phi_m\rangle} \underbrace{\langle \phi_n,\phi_m\rangle}_{\delta_{nm}} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f,\phi_n\rangle \overline{\langle f,\phi_n\rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f,\phi_n\rangle|^2.$$

1) $\Rightarrow$ 3)

Se $\langle f,\phi_n\rangle = 0$, $\forall n$, então $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|\langle f,\phi_n\rangle|^2}_{=0} = 0 \Rightarrow f = 0$.

3) $\Rightarrow$ 2) Devemos mostrar que $f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n = 0$. Porém,

$$\langle f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, \phi_m \rangle = \langle f, \phi_m \rangle - \langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, \phi_m \rangle =$$

$$\langle f, \phi_m \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \underbrace{\langle \phi_n, \phi_m \rangle}_{\delta_{nm}} = \langle f, \phi_m \rangle - \langle f, \phi_m \rangle = 0.$$ Logo, pela hipótese 3), temos $f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n = 0$. ■

Observação: Para ser bem rigoroso, deveríamos provar que $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ sempre converge em L^2 e justificar porque podemos passar somatórios infinitos para fora do produto interno. Não faremos aqui estas justificativas.

Nomenclatura: Dizemos que um conjunto B que satisfaz qualquer uma (e, portanto, todas) das propriedades do Teorema é uma base ortonormal de $L^2(a,b)$.

Dizemos que um conjunto ortogonal $\tilde{B} = \{u_1, u_2, \ldots\}$ é uma base ortogonal de $L^2(a,b)$ se $B = \{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \ldots\}$ for uma base ortonormal de $L^2(a,b)$.

Teorema: Os conjuntos $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ e $\{\cos(nx)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\operatorname{sen}(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ são bases ortogonais de $L^2(-\pi, \pi)$. Os conjuntos $\{\cos(nx)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{\operatorname{sen}(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ são bases ortogonais de $L^2(0, \pi)$.

Demonstração: Vamos mostrar apenas para $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Os outros são análogos.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função 2π-periódica, C^{∞}. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ converge uniformemente a f. Logo converge em L_2 (vimos convergência uniforme $\Downarrow$ convergência L_2)

Para o caso geral $f \in L_2(-\pi,\pi)$, podemos provar que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ converge em L_2 para f fazendo uma aproximação de f por uma função C^∞ e 2π-periódica $\blacksquare$

Observação: Ver Folland caso queira ver a demonstração completa

Corolário: • Seja $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Logo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

Em particular, vale para $f \in PS(-\pi,\pi)$.

•• Seja $f \in L^2(0,\pi)$. Logo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$$

Em particular, vale para $f \in PS(0,\pi)$

Vale igualdade e não só desigualdade de Bessel!

Aplicação: Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ usando a igualdade de Parseval.

Resolução: Seja $f: [0,\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = x$. Vamos achar a expansão em seno de f.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx), \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(n x)\, dx.$$

Logo
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{v'}\, dx = \frac{2}{\pi}\left\{ -x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{-n}\, dx \right\} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}} = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Assim,
$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(nx)\right)$$

Como $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}$ é base de $L^2(0,\pi)$, concluímos que

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{n}(-1)^{n+1} = \left\langle f, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(nx)\right\rangle. \text{ Logo}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle f, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(nx)\right\rangle\right|^2 = \int_0^{\pi} x^2\,dx \iff \frac{\pi^3}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

<u>Observação</u>: Usamos que se $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é base e $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n$, então

$$\langle f, \phi_m\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n, \phi_m\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\langle \phi_n, \phi_m\rangle}_{\delta_{nm}} = a_m \Rightarrow \boxed{a_m = \langle f, \phi_m\rangle}$$

<u>Outros espaços que aparecem em aplicações</u>:

1) Seja $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua com $w(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$.

<u>Definimos $L^2_w(a,b)$</u> como o espaço das funções $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ tais que

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx < \infty.$$

Neste caso, temos o produto interno: $\langle f, g\rangle_w = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,w(x)\,dx$.

$$\|f\|_w = \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

<u>Definimos $L^2(D)$</u>, $D \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^n$ como o espaço das funções $f: D \to \mathbb{C}$ tais que

$$\int_D |f(x)|^2\,dx < \infty.$$

Neste caso, temos o produto interno: $\langle f, g\rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

$$\|f\| = \left(\int_D |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

As definições e propriedades de base continuam as mesmas.

Problema de Sturm-Liouville regular

Vimos que quando resolvemos a equação do calor em 1 dimensão usando o método de separação de variáveis, chegamos às seguintes equações para $x \mapsto X(x)$, em que $u(t,x) = T(t)X(x)$:

$$1)\quad u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

$$2)\quad u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0, \quad u'(0) = u'(\pi) = 0$$

Em 1) e 2) achamos as bases $\{\operatorname{sen}(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\cos(nx)\}_{n=0}^{\infty}$ de $L^2(0,\pi)$.

Que outras equações geram bases de $L^2(a,b)$?

Mais um exemplo:

$$3)\quad u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0, \quad u(-\pi) = u(\pi) \text{ e } u'(-\pi) = u'(\pi)$$

Logo $u(x) = Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x}$

$$Ae^{-i\lambda\pi} + Be^{i\lambda\pi} = Ae^{i\lambda\pi} + Be^{-i\lambda\pi}$$

$$i\lambda Ae^{-i\lambda\pi} - i\lambda Be^{i\lambda\pi} = i\lambda Ae^{i\lambda\pi} - i\lambda Be^{-i\lambda\pi}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\lambda\pi} - e^{i\lambda\pi} & e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi} \\ e^{-i\lambda\pi} - e^{i\lambda\pi} & -e^{i\lambda\pi} + e^{-i\lambda\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para ter solução A, B diferente de zero, precisamos que o determinante acima seja zero. Logo

$$\operatorname{sen}^2(\lambda\pi) + \operatorname{sen}^2(\lambda\pi) = 0 \iff \operatorname{sen}^2(\lambda\pi) \iff \underset{n\in\mathbb{Z}}{\lambda\pi = n\pi} \iff \lambda = n.$$

Logo as soluções são $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, que novamente é base de $L^2(-\pi,\pi)$.

Em que outras situações temos os resultados acima?

Equações de 2° ordem em $[a,b]$.

A forma mais geral de uma equação de 2° ordem linear é uma equação do tipo

$$r(t)\frac{d^2u}{dt^2} + q(t)\frac{du}{dt} + p(t)u = g(t).$$

Se $r, p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$ são de classe C^2, então podemos definir a transformação linear $L : C^2([a,b]) \to C([a,b])$ por

$$Lu(t) = r(t)\frac{d^2u}{dt^2}(t) + q(t)\frac{du}{dt}(t) + p(t)u(t).$$

Em geral, assumiremos que $r(t) \neq 0,\ \forall\, t \in [a,b]$, que L seja auto-adjunto.
$r(t), q(t), p(t) \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in [a,b]$

Recordação: Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (ou $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) uma transformação linear.
Consideremos o produto interno em $\mathbb{C}^n$ (análogo para $\mathbb{R}^n$) dado por

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}$$

Dizemos que T é auto-adjunto se

$$\langle Tz, w \rangle = \langle w, Tz \rangle, \quad \forall\, w, z \in \mathbb{C}^n.$$

Exemplo: $T(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2,\ bx_1 + cx_2)$

Logo $\langle T(x_1,x_2), (y_1,y_2) \rangle = ax_1y_1 + bx_2y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_2$

$\langle (x_1,x_2), T(y_1,y_2) \rangle = \langle (x_1,x_2), (ay_1 + by_2, by_1 + cy_2) \rangle = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2.$

$\Rightarrow \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad x = (x_1,x_2) \text{ e } y = (y_1,y_2).$

$\boxed{T \text{ é auto-adjunto!}}$

Quando estamos trabalhando com funções em $[a,b]$ (em especial em $L^2([a,b])$), vimos que é natural definir o produto interno como

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Em que condições o operador L satisfaz $\langle Lf,g\rangle = \langle f,Lg\rangle$? Vamos considerar $f,g\in C^2$. Basta fazer a conta:

$$\int_a^b \pi(x)\underbrace{f''(x)}_{u'}\,\overline{g(x)}\,dx = f'(x)\pi(x)\overline{g(x)}\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{f'(x)}_{u'}\underbrace{\left(\pi(x)\overline{g(x)}\right)'}_{v}dx =$$

$$f'(x)\pi(x)\overline{g(x)}\Big|_a^b - f(x)\left(\pi(x)\overline{g(x)}\right)'\Big|_a^b + \int_a^b f(x)\left(\pi(x)\overline{g(x)}\right)''dx.$$

$$\int_a^b q(x)\underbrace{f'(x)}_{u'}\,\overline{g(x)}\,dx = f(x)q(x)\overline{g(x)}\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\left(q(x)\overline{g(x)}\right)'dx$$

$$\int_a^b p(x)f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\left(p(x)\overline{g(x)}\right)dx.$$

Assim,

$$\langle Lf,g\rangle = \int_a^b \left(\pi(x)f''(x)+q(x)f'(x)+p(x)f(x)\right)\overline{g(x)}\,dx =$$

$$\int_a^b f(x)\overline{\left(\pi(x)g''(x)+(2\pi'(x)-q(x))g'(x)+(\pi''(x)-q(x)+p(x))g(x)\right)}dx +$$

$$\left(\pi(x)f'(x)\overline{g(x)} - f(x)\left(\pi(x)\overline{g(x)}\right)' + f(x)q(x)\overline{g(x)}\right)\Big|_a^b.$$

Vamos definir o operador $L^*: C^2([a,b]) \to C([a,b])$ por

$$L^* g(x) = \pi(x) g''(x) + (2\pi'(x) - q(x)) g'(x) + (\pi''(x) - q'(x) + p(x)) g(x).$$

Logo

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, L^* g\rangle + \left[\pi(f'\bar{g} - f\bar{g}') + (q - \pi') f\bar{g}\right]\Big|_a^b.$$

Diremos que L é formalmente auto-adjunto se $L = L^*$.

Logo $L = \pi(x)\dfrac{d^2}{dx^2} + q(x)\dfrac{d}{dx} + p(x) = \pi(x)\dfrac{d^2}{dx^2} + (2\pi'(x) - q(x))\dfrac{d}{dx} + (\pi''(x) - q'(x) + p(x))$.

Portanto, L é formalmente auto-adjunto $\iff \begin{cases} 2\pi'(x) - q(x) = q(x) \\ p(x) = \pi''(x) - q'(x) + p(x) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \pi'(x) = q(x) \\ \pi''(x) = q'(x) \end{cases} \iff \pi'(x) = q(x).$

Assim, $L(f) = \pi f'' + q f' + p f = \underbrace{\pi f'' + \pi' f'}_{(\pi f')'} + p f = (\pi f')' + p f$,

ou seja,

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ L \text{ é formalmente auto-adjunto} \iff Lf = \dfrac{d}{dx}(\pi(x) f(x)) + p(x) f(x) \\ \bullet\ \text{Se } L \text{ é formalmente auto-adjunto, então } \langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle + \pi(f'\bar{g} - f\bar{g}')\Big|_a^b. \end{array}}$$

Como eliminar o termo $\pi(f'\bar{g} - f\bar{g}')\Big|_a^b$? Impondo condições de contorno!

Em geral, consideramos duas condições de contorno:

$$B_1(f) := \alpha_1 f(a) + \alpha_1' f'(a) + \beta_1 f(b) + \beta_1' f'(b) = 0$$

$$B_2(f) := \alpha_2 f(a) + \alpha_2' f'(a) + \beta_2 f(b) + \beta_2' f'(b) = 0 \quad , \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, 2.$$

Dizemos que as <u>condições de contorno são auto-adjuntos</u> se

$$\left[r(f'\bar{g} - f\bar{g}') \right] \Big|_a^b = 0 \text{, sempre que } B_1(f) = B_2(f) = B_1(g) = B_2(g) = 0$$
$$f, g \in C^2([a,b]).$$

<u>Conclusão</u>: Se L é formalmente auto-adjunto, f e g satisfazem condições auto-adjuntos em relação ao operador L, então

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle.$$

<u>Exemplo</u>: Seja $L\,u(x) = u''(x)$. Logo

$$\langle Lf, g \rangle = \int_a^b f''(x)\,\overline{g(x)}\,dx = f'(x)\,\overline{g(x)}\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,\overline{g'(x)}\,dx =$$

$$f'(x)\,\overline{g(x)}\Big|_a^b - f(x)\,\overline{g'(x)}\Big|_a^b + \int_a^b f(x)\,\overline{g''(x)}\,dx =$$

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle + \left(f'(b)\overline{g(b)} - f'(a)\overline{g(a)} \right) - \left(f(b)\overline{g'(b)} - f(a)\overline{g'(a)} \right)$$

<u>Condições de Dirichlet</u>: $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$. Logo $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$

<u>de Neumann</u>: $f'(a) = f'(b) = g'(a) = g'(b) = 0$. Logo $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$

<u>Periódicas</u>: $f(a) - f(b) = f'(a) - f'(b) = g'(a) - g'(b) = g(a) - g(b) = 0$

Logo $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$.

Generalização do exemplo:

Seja L um operador formalmente auto-adjunto.

1) Consideremos condições de contorno separadas, ou seja,

$$B_1(f) = \alpha f(a) + \alpha' f'(a) = 0 \quad (\alpha, \alpha') \neq (0,0) \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$$

$$B_2(f) = \beta f(b) + \beta' f'(b) = 0 \quad (\beta, \beta') \neq (0,0) \quad \beta, \beta' \in \mathbb{R}$$

(Só dependem de a ou de b)

Estas condições são auto-adjuntas.

Demonstração:

Basta mostrar que

$$\left.\begin{aligned} \pi(b)\left(f'(b)\overline{g(b)} - f(b)\overline{g'(b)}\right) &= 0 \\ \pi(a)\left(f'(a)\overline{g(a)} - f(a)\overline{g'(a)}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \left[\pi(f'\bar{g} - f\bar{g}')\right]_a^b = 0.$$

Vamos mostrar para a (o caso b é análogo).

Se $\alpha' = 0$, então a condição B_1 implica $f(a) = g(a) = 0$. Logo

$$\pi(a)\Big(f'(a)\underbrace{\overline{g(a)}}_{0} - \underbrace{f(a)}_{0}\overline{g'(a)}\Big) = 0.$$

Se $\alpha' \neq 0$, então $f'(a) = -\frac{\alpha}{\alpha'} f(a)$ e $g'(a) = -\frac{\alpha}{\alpha'} g(a)$. Logo

$$\pi(a)\left(f'(a)\overline{g(a)} - f(a)\overline{g'(a)}\right) =$$

$$\pi(a)\left(-\frac{\alpha}{\alpha'} f(a)\overline{g(a)} + f(a)\frac{\alpha}{\alpha'}\overline{g(a)}\right) = 0. \quad \blacksquare$$

2) Consideremos condições de contorno periódicas, ou seja,

$$\left.\begin{aligned} B_1(f) &= f(a) - f(b) = 0. \\ B_2(f) &= f'(a) - f'(b) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Estas condições são auto-adjuntas se $\pi(a) = \pi(b)$

Demonstração: Basta mostrar que $r(f'\overline{g} - f\overline{g'})\big|_a^b = 0$. De fato,

$$r(b)\left(f'(b)\overline{g}(b) - f(b)\overline{g'}(b)\right) - r(a)\left(f'(a)\overline{g(a)} - f(a)\overline{g'(a)}\right) =$$

$$r(b)\left(f'(b)\overline{g(b)} - f'(a)\overline{g(a)} - f(b)\overline{g'(b)} + f(a)\overline{g'(a)}\right) = 0. \quad \blacksquare$$

Definição: Um problema de Sturm-Liouville regular no intervalo $[a,b]$ consiste em:

1) Um operador formalmente auto-adjunto $L(f) = (rf')' + pf$, em que r é uma função de classe C^1 e p é uma função contínua em $[a,b]$. Além disso, $r(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$.

2) Um conjunto de condições auto-adjuntas $B_1(f) = 0$, $B_2(f) = 0$ para o operador L.

3) Uma função contínua $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $w(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$.

O objetivo é: Achar todas as soluções f do problema de contorno:

$$\begin{matrix} L(f) + \lambda w f = 0 \\ B_1(f) = B_2(f) = 0 \end{matrix} \text{, isto é, } \begin{cases} (r(x)f'(x))' + p(x)f(x) + \lambda w(x) f(x) = 0, \\ B_1(f) = B_2(f) = 0. \end{cases}$$

Dizemos que λ é um autovalor do problema de Sturm-Liouville se $\exists\, f \neq 0$ t.q. $L(f) + \lambda w f = 0$, ou seja, o problema tem solução não trivial.

Dizemos que f é uma autofunção do problema de Sturm-Liouville se $f \neq 0$ e $L(f) + \lambda w f = 0$, ou seja, f é solução do problema para algum λ.

Se $f \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $L(f) + \lambda w f = 0$, então dizemos que λ é o autovalor associado a f e f é a autofunção associada a λ.

Vamos agora estudar as principais propriedades destes operadores antes de dar exemplos.

Para facilitar, estudaremos apenas problemas em que $w \equiv 1$.

<u>Teorema:</u> Consideremos um problema de Sturm-Liouville $\begin{cases} L(f) + \lambda f = 0 \\ B_1(f) = B_2(f) = 0 \end{cases}$, em que

$$L(f) := \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{df}{dx}(x)\right) + p(x) f(x).$$ Mostre que

a) Todos os autovalores são reais.

b) Se f e g são autofunções associadas a autovalores distintos $L(f) = \lambda f$ e $L(g) = \mu g$, $\lambda \neq \mu$, então f e g são ortogonais, ou seja,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx = 0.$$

c) Se λ é um autovalor, então o conjunto de todas as autofunções associadas a λ (união a $\{0\}$) é um subespaço vetorial de $L^2(a,b)$. Este subespaço vetorial tem dimensão ≤ 2. Se as condições forem separáveis, então este subespaço tem dimensão igual a 1. (O subespaço é chamado de autoespaço).

<u>Demonstração:</u>

a) Seja λ um autovalor e f uma autofunção associada a λ. Logo

$$\lambda \|f\|^2 = \langle \lambda f, f \rangle \underset{L f + \lambda f = 0}{=} -\langle L f, f \rangle \underset{\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle}{=} -\langle f, L f \rangle \underset{Lf + \lambda f = 0}{=} \langle f, \lambda f \rangle = \bar{\lambda}\|f\|^2.$$

Logo $\lambda = \bar{\lambda}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2\,dx$$

b) Sejam f e g autofunções associadas a autovalores distintos. Logo

$$\lambda\langle f,g\rangle = \langle \lambda f, g\rangle \underset{\substack{\downarrow \\ Lf+\lambda f=0}}{=} -\langle Lf,g\rangle = -\langle f, Lg\rangle \underset{\substack{\downarrow \\ Lg+\mu g=0}}{=} \langle f,\mu g\rangle = \mu\langle f,g\rangle$$

Assim, $(\lambda-\mu)\langle f,g\rangle = 0$. Como $\lambda-\mu\neq 0$, concluímos que $\langle f,g\rangle = 0$.

c) Sejam f e g autofunções associadas ao autovalor λ. Logo

$$L(f)+\lambda f = 0 \qquad e \qquad L(g)+\lambda g=0$$
$$B_1(f)=B_2(f)=0 \qquad\qquad B_1(g)=B_2(g)=0.$$

Assim, se $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, então

$$L(c_1 f + c_2 g) = c_1 L(f) + c_2 L(g) = c_1\lambda f + c_2\lambda g = \lambda(c_1 f + c_2 g)$$
$$B_1(c_1 f + c_2 g) = c_1 B_1(f) + c_2 B_1(g) = 0$$
$$B_2(c_1 f + c_2 g) = c_1 B_2(f) + c_2 B_2(g) = 0.$$

Logo $c_1 f + c_2 g$ é ou igual a 0, ou é uma autofunção associada a λ.

Por fim, sabemos que a solução de uma EDO de ordem 2 da forma

$$\left(\text{Lembre que } L(f)+\lambda f = 0 \Leftrightarrow \pi f'' + \pi' f' + pf + \lambda f = 0 \right.$$
$$\left. \Leftrightarrow f'' + \frac{\pi'}{\pi} f' + \frac{p}{\pi} + \frac{\lambda}{\pi} = 0 \right)$$

$f''(x) = p(f(x), f'(x), x)$ é determinada por seus valores $f'(0)$ e $f(0)$.

Assim, existe uma bijeção $(h,k)\in\mathbb{C}^2 \xmapsto{T_\lambda} f\in C^2([a,b])$ com $(f(0),f'(0))=(h,k)$.
i.e. $Lf+\lambda f=0$.

Como esta bijeção é linear, concluímos que o conjunto de todas as soluções de $Lf+\lambda f=0$ tem dimensão 2. Como o conjunto das funções que do (64)

é uma solução do problema, então definimos $v(t,x) := u(t,x) - u_0(x)$.

ma

por linearidade que v satisfaz $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) \\ v(t,0) = v(t,l) = 0 \\ v(0,x) = f(x) - \frac{A}{l}x \end{cases}$. Assim

$T(t)X(x)$

$\frac{'(t)}{(t)} = \lambda.$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n e^{-\frac{n^2\pi^2 k}{l^2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \tilde{b}_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(f(x) - \frac{A}{l}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$= b_n - \frac{2A(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad \text{em que } b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

além que $$u_0(x) = \frac{A}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \left(\frac{A}{l}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right)dy\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

$$\boxed{) = v(t,x) + u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A(-1)^{n+1}}{n\pi}\left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}\right)\times \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}$$

adas polares).

$$\to \infty \quad u(t,x) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{A}{l}x.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t,0) = \alpha u(t,0) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = -\alpha u(t,l) + \alpha A \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

imento do exemplo 1. Procuro solução $x \mapsto u_0(x)$. de

b

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x) = 0 \quad \frac{\partial u_0}{\partial x}(0) = \alpha u_0(0) \quad e \quad \frac{\partial u_0}{\partial x}(l) = -\alpha u_0(0,l) + \alpha A.$$

Logo $u_0(x) = ax + b$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}(0) = \alpha u_0(0) \Rightarrow a = \alpha b$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}(l) = -u_0(l) + \alpha A \Rightarrow a = -\alpha a l - \alpha b + \alpha A$$

$$(2 + \alpha l) a = \alpha A \qquad a = \frac{\alpha A}{2 + \alpha l}$$

$$\Rightarrow u_0(x) = \frac{\alpha A}{2+\alpha l} x + \frac{A}{2+\alpha l} = \frac{A}{2+\alpha l}(\alpha x + 1)$$

Se definirmos $v(t,x) := u(t,x) - u_0(x)$, em que u é solução do problema, então

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = \alpha v(t,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t,l) = -\alpha v(t,l) \\ v(0,x) = f(x) - u_0(x) \end{cases}$$

Sabemos resolver v! Basta agora obter u de $u(t,x) = v(t,x) + u_0(x)$.

Exemplo 3 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + R \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ (Diferença agora está no R).

Procuro solução $x \mapsto u_0(x)$ de $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \end{cases}$. Como u_0 só depende de x,

concluímos que $\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x) = -\frac{R}{k} \\ u_0(0) = u_0(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $u_0(x) = -\frac{R}{2k}x^2 + ax + b$

$u_0(0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

$u_0(l) = 0 \Rightarrow -\frac{R}{2k} l^2 + al = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{Rl}{2k}}$

Logo $u_0(x) = -\frac{R}{2k}x^2 + \frac{Rl}{2k}x = \frac{R}{2k}(lx - x^2) = \frac{Rx}{2k}(l - x)$.

Agora definimos $v(t,x) := u(t,x) - u_0(x)$, em que u é solução do problema. Logo o satisfaz $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(t,0) = v(t,\ell) = 0 \\ v(0,x) = f(x) - u_0(x) \end{cases}$

Logo $v(t,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, $\tilde{b}_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} (f(x) - u_0(x)) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$

e $u(t,x) = v(t,x) + u_0(x)$.

Sejam $b_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$, $c_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} u_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$. Logo

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(1 - \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} t\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)}$$

Observação: $c_n = \begin{cases} \dfrac{4\ell^2 R}{\pi^3 k} \dfrac{1}{n^3}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$

Exemplo 4: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \\ u(t,0) = g_0(t),\ u(t,\ell) = g_\ell(t) \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ (Diferença agora está em $g_0(t), g_\ell(t)$)

Acho $t \mapsto u_0(t,x)$ tal que $u_0(t,0) = g_0(t)$ e $u_0(t,\ell) = g_\ell(t)$.

Exemplo $u_0(t,x) = g_0(t) + \dfrac{x}{\ell} g_\ell(t)$

Assim, se u é solução do problema, $v(t,x) := u(t,x) - u_0(t,x)$, então

$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u_0}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u_0}{\partial t} \\ v(t,0) = 0,\ v(t,\ell) = 0 \\ v(0,x) = f(x) - u_0(0,x) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(-\dfrac{\partial g_0}{\partial t} - \dfrac{x}{\ell}\dfrac{\partial g_\ell}{\partial t}\right) \\ v(t,0) = v(t,\ell) = 0 \\ v(0,x) = f(x) - g_0(0) - \dfrac{x}{\ell} g_\ell(0) \end{cases}$

Logo podemos resolver o problema 4 se resolvermos o problema 5 abaixo, pois teremos $\boxed{u(t,x) = v(t,x) + u_0(t,x)}$

Exemplo 5: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t,x) \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ (Diferença está em $F(t,x)$).

Caso 1: F só depende de x.

Acho função $x \mapsto u_0(x)$ que satisfaz $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \end{cases}$. Como u_0 só depende de x concluímos que $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x) = -\dfrac{1}{k}F(x) \Rightarrow u_0(x) = ax + b - \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^x\left(\int_0^y F(s)\,ds\right)dy$

$u_0(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$u_0(l) = 0 \Rightarrow al - \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^l\left(\int_0^y F(s)\,ds\right)dy = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{kl}\int_0^l\left(\int_0^y F(s)\,ds\right)dy$

Logo $u_0(x) = \dfrac{1}{kl}\displaystyle\int_0^l\left(\int_0^y F(s)\,ds\right)dy - \dfrac{1}{k}\int_0^x\left(\int_0^y F(s)\,ds\right)dy$ e obtemos v satisfazendo

$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(t,0) = v(t,l) = 0 \\ v(0,x) = f(x) - u_0(x) \end{cases}$ Sabemos resolver! Logo basta achar v. A solução será $u(t,x) = v(t,x) + u_0(x)$

Caso 2: F depende de t e x.

Vamos expandir F em senos $F(t,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$, $\beta_n(t) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l F(t,x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$.

Sabemos que uma solução de $\begin{matrix}\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,l) = 0\end{matrix}$ é dada por $u(t,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

O truque é procurar soluções da forma $u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$.

Como $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + F(t,x)$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} k\, b_n(t) - \beta_n(t)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = 0.$$

Isto implica $b_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} k\, b_n(t) - \beta_n(t) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\exp\left(\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} t\right) b_n'(t) + \frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} \exp\left(\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} t\right) b_n(t)}_{\left(\exp\left(\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} t\right) b_n(t)\right)'} - \exp\left(\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} t\right)\beta_n(t) = 0$$

$$\left(\exp\left(\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} t\right) b_n(t)\right)' = \exp\left(\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} t\right)\beta_n(t).$$

Logo $\boxed{b_n(t) = \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} k t\right)\left(b_n(0) + \int_0^t \exp\left(\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} s\right)\beta_n(s)\,ds\right)}$ //

em que $b_n(0) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$, pois $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$.

Assim, $\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} k t\right)\left(b_n(0) + \int_0^t \exp\left(\frac{n^2\pi^2 k}{\ell^2} s\right)\beta_n(s)\,ds\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).}$

<u>Exemplo 6</u>:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + F(t,x) \\ u(t,0) = u(t,\ell) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) \end{cases}$$

<u>Mesmo raciocínio!</u> A solução no caso homogêneo é $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\left(b_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right) + \frac{\ell B_n}{n\pi c} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right)\right)$

Vamos procurar soluções da forma $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$. (71)

Escrevendo $F(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(t)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right)=c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(t)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Logo $\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n''(t)+\frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}b_n(t)-\beta_n(t)\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$.

Isto implica $b_n''(t)+\frac{n^2\pi^2c^2}{\ell^2}b_n(t)-\beta_n(t)=0$

Logo $b_n(t)=b_n(0)\cos\left(\frac{n\pi c}{\ell^2}t\right)+\frac{b_n'(0)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell^2}t\right)}{\left(\frac{n\pi c}{\ell^2}\right)}+\frac{\ell}{n\pi c}\int_0^t \text{sen}\left(\frac{\pi c\, n(t-s)}{\ell}\right)\beta_n(s)\,ds$.

Note que $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\ell}{n\pi c}\int_0^t \text{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}(t-s)\right)\beta_n(s)\,ds\right)=$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\ell}{n\pi c}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}(t-t)\right)\beta_n(t)+\int_0^t\cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}(t-s)\right)\beta_n(s)\,ds\right)=$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t\cos\left(\frac{n\pi c}{\ell}(t-s)\right)\beta_n(s)\,ds\right)=-\frac{n\pi c}{\ell}\int_0^t\text{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}(t-s)\right)\beta_n(s)\,ds+\beta_n(t)$$

Logo $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\ell}{n\pi c}\int_0^t\text{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}(t-s)\right)\beta_n(s)\,ds\right)+\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2\frac{\ell}{n\pi c}\int_0^t\text{sen}\left(\frac{n\pi c}{\ell}(t-s)\right)\beta_n(s)\,ds=\beta_n(t)$ //

Note que $b_n(0)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$

$b_n'(0)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$

2° Parte da Matéria

Equação de Laplace - Onda - Calor em dimensões superiores
Transformada de Fourier
Funções de Green
Funções especiais

72

Equação do Calor e da Onda em mais dimensões

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$. Vamos denotar (t,x) os pontos de $[0,\infty[\times\Omega$. Estamos interessados em resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\Delta u(t,x) & , (t,x)\in]0,\infty[\times\Omega \\ u(t,x)=0 & , (t,x)\in]0,\infty[\times\partial\Omega \\ u(0,x)=f(x) & , x\in\Omega \end{cases}$$

Calor

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\Delta u(t,x), & (t,x)\in]0,\infty[\times\Omega \\ u(t,x)=0 & , (t,x)\in]0,\infty[\times\partial\Omega \\ u(0,x)=f(x) & , x\in\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x) & , x\in\Omega \end{cases}$$

Onda

Observação: $u(t,x)=0$, $(t,x)\in]0,\infty[\times\partial\Omega$ são condições de Dirichlet. Elas podem ser trocadas pela condição de Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n}(t,x)=0$, $(t,x)\in]0,\infty[\times\partial\Omega$

condição de Robin : $\frac{\partial u}{\partial n}(t,x)+a(t,x)u(t,x)=0$, $(t,x)\in]0,\infty[\times\partial\Omega$.

Como resolver? Separação de Variáveis! Vamos resolver para condições de Dirichlet.

Calor

Passo 1) Procuro soluções da forma $u(t,x)=T(t)v(x)$, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

Logo $\frac{\partial u}{\partial t}=k\Delta u \Rightarrow T'(t)v(x)=kT(t)\Delta v(x)$. Logo $\frac{\Delta v(x)}{v(x)}=\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)}$.

Assim, $\frac{\Delta v}{v}=-\lambda=\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\Delta v(x)+\lambda v(x)=0\\ T'(t)+\lambda k T(t)=0\end{array}}$