

Como procuramos soluções da forma $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

(71)

Escrevendo $F(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\text{Logo } \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} b_n(t) - \beta_n(t) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\text{Isto implica } b_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} b_n(t) - \beta_n(t) = 0$$

$$\text{Logo } b_n(t) = b_n(0) \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + \frac{b_n'(0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l} t\right)}{\left(\frac{n\pi c}{l}\right)} + \frac{l}{n\pi c} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l} (t-s)\right) \beta_n(s) ds$$

$$\text{Nota que } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{l}{n\pi c} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l} (t-s)\right) \beta_n(s) ds \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{l}{n\pi c} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l} (t-t)\right) \beta_n(t) + \int_0^t \cos\left(\frac{n\pi c}{l} (t-s)\right) \beta_n(s) ds \right) =$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \cos\left(\frac{n\pi c}{l} (t-s)\right) \beta_n(s) ds \right) = -\frac{n\pi c}{l} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l} (t-s)\right) \beta_n(s) ds + \beta_n(t)$$

$$\text{Logo } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{l}{n\pi c} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l} (t-s)\right) \beta_n(s) ds \right) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 \frac{l}{n\pi c} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l} (t-s)\right) \beta_n(s) ds = \beta_n(t)$$

$$\text{Nota que } b_n(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_n'(0) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

2ª Parte da Matéria

- { Equação de Laplace - Indo-Calor em dimensões superiores
- { Transformada de Fourier
- { Funções de Green
- { Funções especiais

(72)

Equação do Calor e do Indo em mais dimensões

Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^n com fronteira suave $\partial\Omega$. Vamos denotar (t, x) os pontos de $]0, \infty[\times \Omega$. Estamos interessados em resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \Delta u(t, x), \quad (t, x) \in]0, \infty[\times \Omega \\ u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in]0, \infty[\times \partial\Omega \\ u(0, x) = f(x), \quad x \in \Omega \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \Delta u(t, x), \quad (t, x) \in]0, \infty[\times \Omega \\ u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in]0, \infty[\times \partial\Omega \\ u(0, x) = f(x), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad x \in \Omega \end{array} \right.$$

Calor

Indo

Observação: $u(t, x) = 0, (t, x) \in]0, \infty[\times \partial\Omega$ são condições de Dirichlet. Elas

podem ser trocadas pela condição de Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n}(t, x) = 0, (t, x) \in]0, \infty[\times \partial\Omega$

condição de Robin: $\frac{\partial u}{\partial n}(t, x) + a(t, x)u(t, x) = 0, (t, x) \in]0, \infty[\times \partial\Omega$.

Como resolver? Separação de Variáveis! Vamos resolver para condições de Dirichlet.

Calor
Passo 1) Procuramos soluções da forma $u(t, x) = T(t)v(x), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Logo $\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u \Rightarrow T'(t)v(x) = k T(t) \Delta v(x)$. Logo $\frac{\Delta v(x)}{v(x)} = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)}$.

Assim, $\frac{\Delta v}{v} = -\lambda = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \Delta v(x) + \lambda v(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda k T(t) = 0 \end{array}}$

Parte 2) Usa a condição de contorno para determinar os possíveis λ, v . (73)

Em geral, não é possível resolver o problema (a não ser em retângulos, bolas e esferas, onde foram levados ao estudo de funções especiais). No entanto, o seguinte Teorema é válido.

Teorema: Existe uma seqüência $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reais, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funções

$v_n \in L^2(\Omega)$ ($v_n \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$, $v_n|_{\partial\Omega} \in C^{\infty}$) tal que

1) λ_n são os autovalores de $\begin{cases} -\Delta v = \lambda v & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$, ou seja, os valores para os quais

existe uma solução não nula do problema.

2) v_n são autovetores associados a λ_n , ou seja, $\begin{cases} -\Delta v_n = \lambda_n v_n & \text{em } \Omega \\ v_n = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$

3) O conjunto $\{v_n\}$ é uma base de $L^2(\Omega)$, ou seja, $\int_{\Omega} v_n(x) \overline{v_m(x)} dx = \delta_{nm}$

ou $f \in L^2(\Omega)$ ($\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty$), então $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, v_n \rangle v_n$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} f(y) \overline{v_n(y)} dy \right) v_n(x) \quad (\text{convergência em } L^2).$$

Este Teorema diz que \exists um número suficiente de soluções do problema $\begin{cases} -\Delta v = \lambda v \\ v = 0 \end{cases}$.

(O mesmo vale para condições de Neumann e Robin). É um Teorema não trivial que tomou + de 50 anos para ser demonstrado! (referência W. Steins)
Muitos bons matemáticos do século XIX cometeram erros relacionados ao Teorema.

Caso 3 Usar condições iniciais para achar a solução do problema.

As soluções do forma $T(t)v(x)$ são

$$u_n(t, x) = e^{-\lambda_n k t} v_n(x)$$

Logo $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n k t} v_n(x)$.

Como $u(0, x) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x) = f(x) \Rightarrow a_n = \langle f, v_n \rangle$.

Concluímos que $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} f(y) \overline{v_n(y)} dy \right) e^{-\lambda_n k t} v_n(x)$ □

Indo

Caso 1 Alto $\Delta v(x) + \lambda v(x) = 0$
 $T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0$

Caso 2 Alto $u_n(t, x) = (a_n \cos(c\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \sin(c\sqrt{\lambda_n} t)) v_n(x)$.

Caso 3 Concluímos que $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(c\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \sin(c\sqrt{\lambda_n} t)) v_n(x)$

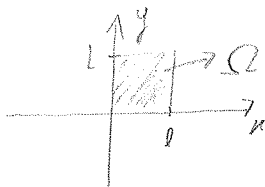
Logo $f(x) = u(0, x) \Rightarrow a_n = \langle f, v_n \rangle$

$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) \Rightarrow c\sqrt{\lambda_n} b_n = \langle g, v_n \rangle$.

$\Rightarrow u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_{\Omega} f(y) \overline{v_n(y)} dy \right) \cos(c\sqrt{\lambda_n} t) + \left(\frac{1}{c\sqrt{\lambda_n}} \int_{\Omega} g(y) \overline{v_n(y)} dy \right) \sin(c\sqrt{\lambda_n} t) \right] v_n(x)$

As expressões são análogas as obtidas para $n=1$. Para condições de Neumann e Robin, o procedimento é o mesmo.

Exemplo: $\Omega :=]0, l[\times]0, L[$



(75)

Membrano elástica sobre um quadro retangular. $(x,y) \in]0, l[\times]0, L[$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x, y) = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) \right) \\ u(t, 0, y) = u(t, l, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, L) = 0 \\ u(0, x, y) = f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y) = g(x, y) \end{cases}$$

Caso 1) Fazendo $u(t, x, y) = T(t)v(x, y)$, obtemos

$$\boxed{T''(t) + \lambda c^2 T(t) \quad , \quad \Delta v(x, y) + \lambda v(x, y) = 0.}$$

Caso 2) Usando as condições de Dirichlet, concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta v(x, y) + \lambda v(x, y) &= 0 \quad \text{em }]0, l[\times]0, L[. \\ v(x, y) &= 0 \quad \text{em } \{0, l\} \times]0, L[\cup]0, l[\times \{0, L\}. \end{aligned}$$

Vamos fazer $v(x, y) = X(x)Y(y)$. Logo

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0.$$

$$\text{Assim, } \frac{X''}{X} = -\nu^2 \quad , \quad -\nu^2 - \sigma^2 + \lambda = 0.$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\sigma^2$$

$$X(x) = a \cos(\nu x) + b \sin(\nu x) \quad . \quad \text{Como } X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$Y(y) = c \cos(\sigma y) + d \sin(\sigma y) \quad . \quad \text{Como } Y(0) = Y(L) = 0 \Rightarrow Y(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{L}y\right).$$

$$\text{Logo } v_{nm}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}y\right) \quad , \quad \lambda_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}$$

Concluimos que

$$u_{nm}(t, x, y) = \left(a_{nm} \cos\left(\sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{L^2}} \pi c t\right) + b_{nm} \sin\left(\sqrt{\frac{m^2}{l^2} + \frac{n^2}{L^2}} \pi c t\right) \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

(76)

Como 3)

Entonces $u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(t, x, y)$.

Logo $u(0, x, y) = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{l}}{2} a_{nm} \left(\frac{\sqrt{2}}{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \frac{\sqrt{2}}{L} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right)$$

Usamos que $\left\{ \frac{2}{\sqrt{lL}} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right); m, n \in \mathbb{N} \right\}$ forma base de $L^2(\Omega)$. Logo

$$\frac{\sqrt{lL}}{2} a_{mn} = \int_0^l \int_0^L f(x, y) \frac{2}{\sqrt{lL}} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dx dy$$

$$\Rightarrow a_{mn} = \frac{4}{lL} \int_0^l \int_0^L f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dx dy$$

Como $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y) = g(x, y)$, obtenemos

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \lambda_{nm} c \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

$$\Rightarrow b_{nm} = \frac{4}{lL} \frac{1}{c \lambda_{nm}} \int_0^l \int_0^L g(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dx dy$$

$$u(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_{nm} \cos\left(\sqrt{\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{L}\right)^2} \pi c t\right) + b_{nm} \sin\left(\sqrt{\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{L}\right)^2} \pi c t\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Alguns propriedades gerais de λ_n e v_n podem ser deduzidas de forma elementar. São deduções análogas às obtidas para o problema de Sturm-Liouville. (77)

Proposição: Seja $u, v \in C^2(\Omega)$ tal que uma das 3 alternativas é válida

$$1) u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$3) \left(\frac{\partial u}{\partial n} + au\right)|_{\partial\Omega} = \left(\frac{\partial v}{\partial n} + av\right)|_{\partial\Omega} = 0.$$

Logo $\langle \Delta u, v \rangle = \langle u, \Delta v \rangle$.

Demonstração: Observamos que

$$\langle u, \Delta v \rangle - \langle \Delta u, v \rangle = \int (\Delta u v - u \Delta v) dx = \int \nabla \cdot (u \nabla v - (\nabla u) v) dx \stackrel{\text{Teorema do divergente}}{=} \int (u \nabla v - (\nabla u) v) \cdot n dS = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

Logo de val 1), então $\int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0$

de val 2), então $\int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0.$

de val 3), então $\int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \int (-auv + avu) dS = 0 \quad \square$

Proposição: Sejam $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ os autovalores do Laplaciano com condições 1), 2) ou 3) e v_n autovetores associados. Logo $\lambda_n \in \mathbb{R}, \forall n$ e $\langle v_n, v_m \rangle = 0$ se $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Demonstração: $\lambda_n \langle v_n, v_n \rangle = \langle \lambda_n v_n, v_n \rangle = \langle -\Delta v_n, v_n \rangle = \langle v_n, -\Delta v_n \rangle = \bar{\lambda}_n \langle v_n, v_n \rangle$
 Logo $(\lambda_n - \bar{\lambda}_n) \|v_n\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_n = \bar{\lambda}_n \quad \square$

Se v_n e v_m estão associados a $\lambda_n \neq \lambda_m$, então

(78)

$$\lambda_n \langle v_n, v_m \rangle = \langle -\Delta v_n, v_m \rangle = \langle v_n, -\Delta v_m \rangle = \lambda_m \langle v_n, v_m \rangle.$$

$$\text{Logo } \underbrace{(\lambda_n - \lambda_m)}_{\neq 0} \langle v_n, v_m \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_n, v_m \rangle = 0$$

Outro fato interessante é o fato de autovalores serem ≥ 0 . Isto implica que os exponenciais não decrescem e não aparecem como nem uma hiperbólica na equação de ondas.

Proposição: Todos os autovalores do Laplaciano são

- 1) > 0 , se temas condições de Dirichlet
- 2) ≥ 0 , se temas condições de Neumann ou Robin $\frac{\partial v}{\partial n} + av = 0$ para $a \geq 0$.

Demonstração: Seja $v \in C^1(\Omega)$. Logo

$$\int_{\Omega} (-\Delta v) \bar{v} \, dx = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\nabla v) \bar{v}) - |\nabla v|^2 \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\bar{v} \nabla v) \, dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx =$$

$$- \int_{\partial \Omega} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial n} \, dS + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx$$

Logo, se $-\Delta v = \lambda v$, então $\lambda \int_{\Omega} |v|^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int_{\partial \Omega} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial n} \, dS$. Assim

1) Nas condições de Dirichlet, $\lambda \int_{\Omega} |v|^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \geq 0$, $\neq 0 \Leftrightarrow \nabla v \neq 0 \Leftrightarrow v \notin C_0 \Leftrightarrow v \neq 0$.

Logo $\lambda > 0$.

2) Nas condições de Neumann, $\lambda \int_{\Omega} |v|^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \geq 0, \forall v \Rightarrow \lambda \geq 0$

Nas condições de Robin, $\lambda \int_{\Omega} |v|^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\partial \Omega} a |v|^2 \, dx \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$

Condição: Se $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n k t} v_n(x)$ é solução da equação de calor, então (79)

calor, então

$$\|u(t, x)\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 e^{-2\lambda_n k t}} \leq e^{-\lambda_1 k t} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2} = e^{-\lambda_1 k t} \|u(0, x)\|_{L^2(\Omega)}$$

Logo $\lambda_1 > 0$, como nas condições de Dirichlet, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0.$$

A equação de Poisson.

Estudamos a equação de Laplace e de Calor. Vamos agora estudar o problema de Dirichlet:

Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Interpretação: u pode representar a temperatura estacionária de um objeto Ω

em que a temperatura no bordo é igual a f .

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta u = 0 \\ u(t, x) = f(x) \\ u(x) = f(x) \end{array} \right)$$

u pode representar o potencial eletrostático de uma região Ω

em que não há cargas e o potencial $\partial\Omega$ é conhecido.

u pode representar ... **COMPLETAR**

Como resolver o problema acima?

Em casos com geometria simples, basta usar separação de variáveis.

1) Em uma dimensão

(80)

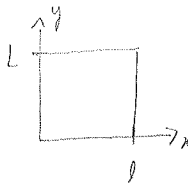
$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = 0, & x \in [0, l] \\ u(0) = u_0, & u(l) = u_1 \end{cases}$$

Solução: $u(x) = ax + b$. Logo $u(0) = b = u_0$
 $u(l) = al + b = u_1 \Rightarrow al + u_0 = u_1$
 $\Rightarrow a = \frac{u_1 - u_0}{l}$

Então, $u(x) = \left(\frac{u_1 - u_0}{l}\right)x + u_0$. OK

2) Em um retângulo

$\Omega :=]0, l[\times]0, L[$ é a região



$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & u(x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = f(x,y), & u(x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Vamos que $f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y=0 \\ f_2(x), & y=L \\ g_1(y), & x=0 \\ g_2(y), & x=l \end{cases}$

Pelo princípio de superposição, basta achar solução para $g_i = 0, \forall i$, e solução para $f_i = 0$.

Depois podemos somá-las.

Vamos considerar, então, o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\ u(0,y) = u(l,y) = 0 \\ u(x,0) = f_1(x), u(x,L) = f_2(x) \end{cases}$$

Vamos resolver por separação de variáveis

Procuramos $u(x,y) = X(x)Y(y)$

tal que $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \\ u(0,y) = u(l,y) = 0 \end{cases}$. Logo

$$\begin{cases} X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\nu^2.$$

Logo $X''(x) + v^2 X(x) = 0$, com $X(0) = X(l) = 0$.
 $Y''(y) - v^2 Y(y) = 0$

(81)

Assim, $X(x) = a \cos(vx) + b \sin(vx)$. Como $X(0) = X(l) = 0$, concluímos que

$X_n(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$. Logo $v = \frac{n\pi}{l}$.

Assim, $Y''(y) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Y(y) = 0$. Isto implica que
 $Y(y) = \alpha_n \cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)$.

Assim, assim, soluções $u_n(x, y) = \alpha_n \cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)$.

Vamos procurar soluções da forma

$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left(\alpha_n \cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right) \right)$.

Para achar α_n e β_n , vamos usar a condição $u(x, 0) = f_1(x)$ e $u(x, l) = f_2(x)$.

Com isto, obtemos
 $f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ e $f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cosh\left(\frac{n\pi l}{l}\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi l}{l}\right) \right)$.

Expandindo f_1 e f_2 em séries de Taylor seno, obtemos

$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ e $f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$.

Logo $\alpha_n = a_n$ e $\alpha_n \cosh\left(\frac{n\pi l}{l}\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi l}{l}\right) = b_n$

\Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha_n = a_n \\ \beta_n = \frac{b_n - a_n \cosh\left(\frac{n\pi l}{l}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi l}{l}\right)} \end{cases}$$

Assim, $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right) + \frac{b_n - a_n \cosh\left(\frac{n\pi l}{l}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi l}{l}\right)} \sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right) \right)$.

(π, θ) existe, concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-in\theta} \pi^n \text{ Logo}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) e^{-in\theta} d\phi$$

$$f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi^{|n|} e^{in(\theta-\phi)} \right) d\phi$$

uniformemente, absolutamente com f aproximado.

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \pi^n e^{-in\psi} =$$

$$\frac{\pi e^{-i\psi} + \pi e^{-i\psi} - \pi^2}{(1 - \pi e^{i\psi})(1 - \pi e^{-i\psi})} = \frac{1 - \pi^2}{1 - 2\pi \cos \psi + \pi^2}$$

$$f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\pi, \theta - \phi) f(\phi) d\phi$$

87

$$\lambda'(\pi) + b f(\pi) = 0$$

$$+ b \pi^\lambda = 0$$

$p(\lambda)$

$$\text{mas } f(\pi) = a_1 \pi^{\lambda_1} + a_2 \pi^{\lambda_2}$$

$$\text{Logo } f(\pi) = a_1 \pi^{\lambda_1} + a_2 \pi^{\lambda_1} \ln(\pi)$$

$$f'(\pi) = \lambda_1 \pi^{\lambda_1-1} \ln(\pi) + \pi^{\lambda_1-1}$$

$$f''(\pi) = \lambda_1(\lambda_1-1) \pi^{\lambda_1-2} \ln(\pi) + \lambda_1 \pi^{\lambda_1-2} + (\lambda_1-1) \pi^{\lambda_1-2}$$

$$1) \ln(\pi) + \lambda_1 + (\lambda_1-1) +$$

$$\ln(\pi) + a +$$

$$\ln(\pi) \int \pi^{\lambda_1} = (2\lambda_1 + a - 1) \pi^{\lambda_1}$$

$$\Rightarrow b = \frac{(a-1)^2}{4} \text{ Logo } p(\lambda) = \left(\lambda + \frac{(a-1)}{2} \right)^2$$

$\ln(\pi)$ é solução

$$\text{Logo } p(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{n\pi}{\beta} \right)^2 \text{ os raízes}$$

são particulares não

$$\text{e } \cos\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) \pi^{-\frac{n\pi}{\beta}}$$

$$\text{e } \left(\frac{n\pi}{\beta} \theta \right) \left(a_n \pi^{\frac{n\pi}{\beta}} + b_n \pi^{-\frac{n\pi}{\beta}} \right)$$

$$\text{como } f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) \text{ e } g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right)$$

$$\begin{cases} b_n \pi_0^{-\frac{n\pi}{\beta}} = d_n \\ b_n \pi_1^{-\frac{n\pi}{\beta}} = c_n \end{cases}$$

Podemos agora resolver o sistema. on.

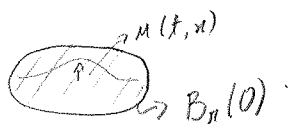
Funções de Bessel

Seja Ω um "tambores", isto é, o conjunto $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$.

Vamos estudar as vibrações de uma membrana sobre este tambores. Para tanto, vamos estudar a equação de onda sobre Ω . Neste caso $u(t, x, y)$ é a deslocamento transversal da membrana.

A equação de onda é

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x, y) = c^2 \Delta u(t, x, y) \\ u(t, x, y) = 0, \text{ se } (x, y) \in \partial\Omega \\ u(0, x, y) = f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y) = g(x, y) \end{cases}$$



Em coordenadas Polares

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, \pi, \theta) = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \pi^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \pi} + \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \\ u(t, \pi, \theta) = 0 \\ u(t, \pi, \theta) = f(t, \pi, \theta) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, \pi, \theta) = g(t, \pi, \theta) \end{cases}$$

Para resolver a equação acima, vamos usar o método de separação de variáveis.

Procuramos soluções $u(t, \pi, \theta) = T(t)R(\pi)\Theta(\theta)$, obtendo

$$T''R\Theta = c^2 \left(TR''\Theta + \frac{1}{\pi} TR'\Theta + \frac{1}{\pi^2} TR\Theta'' \right)$$

$$\text{Logo } \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{R''(\pi) + \frac{1}{\pi} R'(\pi)}{R(\pi)} + \frac{\frac{1}{\pi^2} \Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$$

$$\underbrace{\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\mu^2}_{\Downarrow} \quad \underbrace{\frac{R''(\pi) + \frac{1}{\pi} R'(\pi)}{R(\pi)} + \frac{\frac{1}{\pi^2} \Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}}_{\Updownarrow = -\mu^2} = -\mu^2$$

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\mu^2 \quad \text{e} \quad \frac{\pi^2 R''(\pi) + \pi R'(\pi)}{R(\pi)} + \mu^2 \pi^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = +\nu^2$$

Concluímos que

$$T''(t) + c^2 \mu^2 T(t) = 0$$

$$\Theta''(\theta) + \nu^2 \Theta(\theta) = 0$$

$$\pi^2 R''(\pi) + \pi R'(\pi) + (\mu^2 \pi^2 - \nu^2) R(\pi) = 0$$

Vamos fazer a seguinte mudança de variável $f(x) = R(\frac{x}{\mu})$, ou seja, $R(\pi) = f(\mu\pi)$.

Logo $R'(\pi) = \mu f'(\mu\pi)$ e $R''(\pi) = \mu^2 f''(\mu\pi)$.

$$\pi^2 R''(\pi) + \pi R'(\pi) + (\mu^2 \pi^2 - \nu^2) R(\pi) = 0 \Leftrightarrow \mu^2 \pi^2 f''(\mu\pi) + \mu \pi f'(\mu\pi) + (\mu^2 \pi^2 - \nu^2) f(\mu\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - \nu^2) f(x) = 0}$$

\downarrow
 $x = \mu\pi$ Equação de Bessel de ordem ν .

Para estudar a equação de Bessel vamos definir as conhecidas funções de Bessel.

Definição: Seja $\nu \in \mathbb{R}$.

1) A função de Bessel de ordem ν é a função $J_\nu:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

A função acima também é chamada de Bessel do primeiro tipo.

2) A função de Weber ou Bessel do segundo tipo é a função $Y_\nu:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \nu \notin \mathbb{Z} \\ \lim_{\tilde{\nu} \rightarrow \nu} \frac{\cos(\tilde{\nu}\pi) J_{\tilde{\nu}}(x) - J_{-\tilde{\nu}}(x)}{\sin(\tilde{\nu}\pi)}, & \nu \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Observação: A função gamma é definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0.$$

Ela pode ser estendida a uma função meromorfa em \mathbb{C} e ela satisfaz

$$\Gamma(1) = 1 \quad \rightarrow \quad \Gamma(n+1) = n!$$
$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

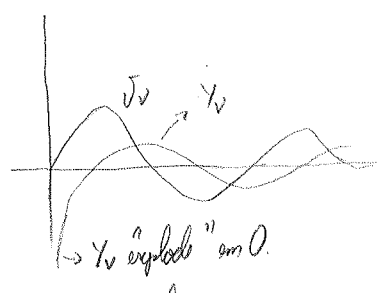
Proposição: 1) As soluções da equação de Bessel de ordem ν não são da forma

$$\alpha J_\nu(x) + \beta Y_\nu(x), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

2) Se $\nu \in \mathbb{N}_0$, então $J_\nu(x) \sim \frac{x^\nu}{2^\nu \nu!}, x \rightarrow 0$

$$Y_\nu(x) \sim -\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, x \rightarrow 0$$

$$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{x}{2}\right), x \rightarrow 0$$



Observamos que $f(x) \sim g(x), x \rightarrow 0$ significa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ou seja, " $f(x)$ se comporta como $g(x)$ quando x se aproxima de zero".

Aplicação ao problema do membrano:

Voltando ao nosso problema, tenhamos $u(t, \pi, \theta) = T(t)g(\pi, \theta)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \Leftrightarrow T''(t)g(\pi, \theta) = c^2 T(t) \Delta g(\pi, \theta) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{\Delta g(\pi, \theta)}{g(\pi, \theta)} = -\mu^2$$

Logo $T''(t) + c^2 \mu^2 T(t) = 0$
 $\Delta g(\pi, \theta) + \mu^2 g(\pi, \theta) = 0$

Para $g(\pi, \theta) = R(\pi)\Theta(\theta)$, temos

$\Theta''(\theta) + \nu^2 \Theta(\theta) = 0$
 $\pi^2 R''(\pi) + \pi R'(\pi) + (\mu^2 \pi^2 - \nu^2) R(\pi) = 0$

Equação de Autovalores do Laplaciano
 (com condições de Dirichlet $g(b, \theta) = 0$).

Da equação de Θ , obtemos $\Theta(\theta) = A \cos(\nu \theta) + B \sin(\nu \theta)$. Porém estamos num círculo,

logo precisamos que $\Theta(\theta + 2\pi n) = \Theta(\theta), \forall n, \forall \theta$. Logo $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Portanto, R é solução da equação $\pi^2 R''(\pi) + \pi R'(\pi) + (\mu^2 \pi^2 - \nu^2) R(\pi) = 0$.

Logo $f(x) = R\left(\frac{x}{\mu}\right)$ é solução de $x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - \nu^2) f(x) = 0$.

Assim, $f(x) = \alpha J_\nu(x) + \beta Y_\nu(x)$. Logo $R(\pi) = \alpha J_\nu(\mu\pi) + \beta Y_\nu(\mu\pi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

A solução $Y_\nu(\mu\pi)$ vai a infinito quando $\pi \rightarrow 0$. Logo não é uma solução física.

Assim, $R(\pi) = J_\nu(\mu\pi)$.

Como $u(t, b, \theta) = 0$, concluímos que $J_\nu(\mu b) = 0$. Logo μb é zero da função J_ν .

Sejam $\lambda_{1,\nu}, \lambda_{2,\nu}, \lambda_{3,\nu}, \dots$ os zeros da função J_ν . Logo $\mu = \frac{\lambda_{j,\nu}}{b}$.

Conclusão: • Os autovalores do Laplaciano são $\left\{ \frac{\lambda_{j,\nu}}{b} ; j \in \{1, 2, 3, \dots\}, \nu \in \{0, 1, 2, \dots\} \right\}$.

• As autofunções do Laplaciano são $\left\{ J_n\left(\frac{\lambda_{k,n}\pi}{b}\right) \cos(n\theta), n \geq 0, k \geq 1 \right\} \cup$
 $\left\{ J_n\left(\frac{\lambda_{k,n}\pi}{b}\right) \sin(n\theta), n \geq 1, k \geq 1 \right\}$

Lembrando do Teorema enunciado acima, temos ainda:

- Os autovalores formam uma sequência cujo limite é $+\infty$.
- As autofunções formam uma base de $L^2(\Omega)$, $\Omega = B_b(0)$.

Vamos juntar tudo:

$$T(t) = A \cos\left(\frac{\lambda_{j,m} c}{b} t\right) + B \sin\left(\frac{\lambda_{j,m} c}{b} t\right)$$

$$\Theta(\theta) = C \cos(n\theta) + D \sin(n\theta)$$

$$R(\pi) = E J_n\left(\frac{\lambda_{j,m}\pi}{b}\right).$$

Logo a solução geral é

$$u(t, r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\lambda_{j,n} c}{b} t\right) \left(A_{j,n} J_n\left(\frac{\lambda_{j,n} r}{b}\right) \cos(n\theta) + B_{j,n} J_n\left(\frac{\lambda_{j,n} r}{b}\right) \sin(n\theta) \right) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\lambda_{j,n} c}{b} t\right) \left(\tilde{A}_{j,n} J_n\left(\frac{\lambda_{j,n} r}{b}\right) \cos(n\theta) + \tilde{B}_{j,n} J_n\left(\frac{\lambda_{j,n} r}{b}\right) \sin(n\theta) \right)$$

Usando a ortogonalidade das autofunções, podemos determinar a constante acima

Supondo, por exemplo, que g seja igual a 0. Logo $\tilde{A}_{j,n} = \tilde{B}_{j,n} = 0$,

$$A_{j,0} = \frac{1}{\pi b^2 J_0(\lambda_{j,0})^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^b f(r, \theta) J_0\left(\frac{\lambda_{j,0} r}{b}\right) r dr d\theta$$

$$A_{j,n} = \frac{1}{\pi b^2 J_{n+1}(\lambda_{j,n})^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^b f(r, \theta) J_n\left(\frac{\lambda_{j,n} r}{b}\right) \cos(n\theta) r dr d\theta$$

$$B_{j,n} = \frac{1}{\pi b^2 J_{n+1}(\lambda_{j,n})^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^b f(r, \theta) J_n\left(\frac{\lambda_{j,n} r}{b}\right) \sin(n\theta) r dr d\theta$$

Nossa conclusão final é de que a solução da equação de onda é soma de soluções de forma $J_n\left(\frac{\lambda_{j,n} r}{b}\right) \cos(n\theta + \phi)$ que vibram com frequências $\frac{\lambda_{j,n} c}{2\pi b}$.

Será que tudo isto é só matemática ou tem alguma realidade física?

Resposta: Sem realidade física! Ver

WWW.WIKIPEDIA.ORG

Vibrations of a circular Membrane

WWW.YOUTUBE.COM

Circular Membrane (drum head) Vibration.

Transformada de Fourier

(87)

Motivação: Suponha que queremos resolver $\frac{d^2 u}{dx^2}(x) - u(x) = f(x)$. Como fazer?

Solução: Se tivéssemos algo do tipo $y^2 u(y) + u(y) = f(y)$, a solução seria $(y^2 + 1)u(y) = f(y) \Rightarrow u(y) = \frac{1}{1+y^2} f(y)$. Logo, no nosso caso, temos

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)u(x) = f(x) \Rightarrow u(x) = \left(\frac{1}{\frac{d^2}{dx^2} - 1}\right)f(x)!$$

Isso absurdo, mas podemos fazer com que faça sentido.

Exemplo: Suponha que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ seja 2π -periódica e C^∞ . Queremos encontrar uma

função $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que seja 2π -periódica e C^∞ tal que

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(x) - u(x) = f(x).$$

Como fazer?

Solução: Sabemos que $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, $u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$. Logo

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(x) - u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\frac{d^2}{dx^2} e^{inx} - e^{inx}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n^2 - 1)a_n e^{inx}.$$

Assim, como $\frac{d^2 u}{dx^2}(x) - u(x) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(-n^2 - 1)a_n - c_n] e^{inx} = 0$. Portanto,

$$(n^2 + 1)a_n + c_n = 0 \Rightarrow a_n = -\frac{c_n}{1+n^2}$$

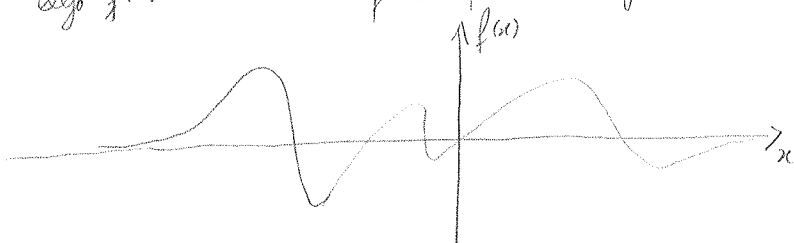
Concluímos que $u(x) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{1+n^2} e^{inx}$. Não é difícil verificar que u também é C^∞ e, de fato, resolve o problema. □

Assim podemos interpretar $\frac{1}{1 - \frac{d^2}{dx^2}} f(x)$ como $-\frac{1}{1 - \frac{d^2}{dx^2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{1}{1+n^2} c_n e^{inx}$ //

Vamos supor que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ não seja 2π -periódica e sim uma função qualquer. Como resolver! Ideia: Fazem o mesmo que o caso de Fourier, porém integrando de $[-\infty, \infty]$ ao invés de $[-\pi, \pi]$ (ou $[-l, l]$). (88)

"Dedução" não rigorosa da transformada de Fourier:

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função que decai rapidamente para $x \rightarrow \pm\infty$.



Para todo $l > 0$, podemos escrever $f|_{[-l, l]}: [-l, l] \rightarrow \mathbb{C}$ em série de Fourier.

$$f(x) = \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,l} e^{i \frac{n\pi}{l} x}, \text{ em que } c_{n,l} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) e^{-i \frac{n\pi}{l} y} dy.$$

Seja $\Delta\varphi := \frac{\pi}{l}$, $\varphi_n := n \Delta\varphi = \frac{n\pi}{l}$. Logo

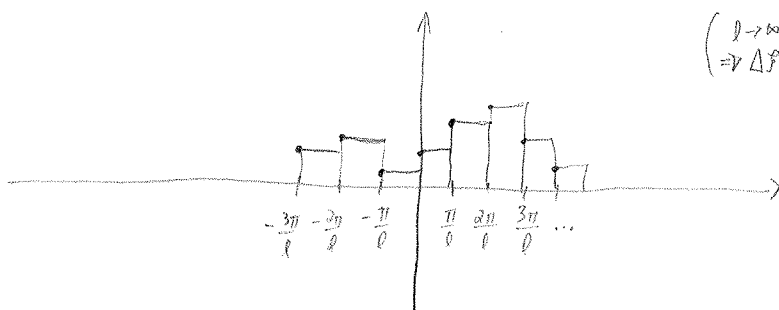
$$f(x) = \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,l} e^{i \varphi_n x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,l} e^{i \varphi_n x} \frac{\pi}{l} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,l} e^{i \varphi_n x} \Delta\varphi,$$

em que $c_{n,l} = \int_{-l}^l f(y) e^{-i \varphi_n y} dy$.

Como f decai rapidamente, então para l grande $c_{n,l} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i \varphi_n y} dy$. O integral só depende de φ_n . Vamos denotar $\hat{f}(\varphi_n) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i \varphi_n y} dy$. Logo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\varphi_n) e^{i x \varphi_n} \Delta\varphi \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\varphi) e^{i x \varphi} d\varphi$$

$\left(\begin{array}{l} l \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \Delta\varphi \rightarrow 0 \end{array} \right)$



Concluimos que para $l \rightarrow \infty$ nossa escolha (o que fizemos não é rigoroso) (89)

$$a \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy, \text{ em que } \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx.$$

Vamos usar as expressões acima para definir a transformada de Fourier. Vamos usar as seguintes definições:

$$L^1(\mathbb{R}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\}$$

$$L^\infty(\mathbb{R}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \exists M > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq M \right\} \quad (*)$$

Definição: A transformada de Fourier é uma função $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ dada

$$\text{por } \mathcal{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx.$$

(Denotamos $\mathcal{F}(f)(y)$ por $\hat{f}(y)$ também).

Observação: De fato, temos que

$$|\mathcal{F}(f)(y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

Logo $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$, em que

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad \text{e} \quad \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \inf \{ M; |f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R} \}$$

Podemos também mostrar que $\mathcal{F}(f)$ é uma função contínua. (não faremos, mas não é difícil)

Proposição: A transformada de Fourier é uma transformação linear, isto é, se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g).$$

* Para nos ajudar deveríamos usar o teorema de integração de Lebesgue. Além disso, deveríamos dizer que $|f(x)| \leq M$ para "quase todo ponto". O livro de Zollard dá mais informações sobre isto. Para o curso, vamos preferir não nos tão precisos. Observamos que se $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$

Demonstração:

Basta observar que $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx =$
 $\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(x) dx = \alpha \mathcal{F}(f)(\xi) + \beta \mathcal{F}(g)(\xi) \Rightarrow \mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$ □

Proposição: (Propriedades da Transformada de Fourier). Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Logo

a) Se $a \in \mathbb{R}$, então

$$\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi) \quad , \quad \mathcal{F}(e^{iax} f(x)) = \hat{f}(\xi-a)$$

b) Se $\delta > 0$, então

$$\mathcal{F}(f(\frac{x}{\delta})) = \hat{f}(\delta\xi) \quad , \quad \mathcal{F}(f(\delta x)) = \frac{1}{\delta} \hat{f}(\frac{\xi}{\delta})$$

c) Se f é contínua, suave por partes e $f' \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$$

Se $x \mapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$\mathcal{F}[x f(x)] = i \frac{d\hat{f}}{d\xi}(\xi)$$

Demonstração:

a) $\mathcal{F}(f(x-a)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x-a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(y+a)\xi} f(y) dy = e^{-ia\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) dy = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$
 $y = x-a$
 $dy = dx$

$\mathcal{F}(e^{iax} f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi + ia x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi-a)} f(x) dx = \hat{f}(\xi-a)$

b) $\mathcal{F}(f(\frac{x}{\delta}))(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{x}{\delta}) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\delta y \xi} dy = \hat{f}(\delta\xi)$
 $y = \frac{x}{\delta}$
 $dy = \frac{1}{\delta} dx$

$\mathcal{F}(f(\delta x))(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy \xi} dy = \frac{1}{\delta} \hat{f}(\frac{\xi}{\delta})$
 $y = \delta x$
 $dy = \delta dx$

c) Vamos começar observando que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Pela condição de propagação, vale o teorema fundamental do cálculo. Logo

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y) dy \Rightarrow f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y) dy.$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(0) + \int_0^{\infty} f'(y) dy$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(0) - \int_{-\infty}^0 f'(y) dy$.

Como $f' \in L^1(\mathbb{R})$, existe $\int_0^{\infty} f'(y) dy$ e $\int_{-\infty}^0 f'(y) dy$. Assim os limites existem. Mas

$f \in L^1(\mathbb{R})$, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Logo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ devem ser iguais a zero.

Portanto, podemos integrar por partes e obter

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^p} f'(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ix^p} f'(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \left. f(x) e^{-ix^p} \right|_{-R}^R - \int_{-R}^R f(x) (-i^p) e^{-ix^p} dx \right\} =$$

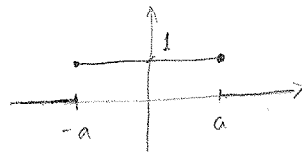
$$i^p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^p} f(x) dx = i^p \hat{f}(p).$$

Por outro lado, se $x \mapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, então

$$\mathcal{F}(x f(x))(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^p} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{d}{dp} (e^{-ix^p}) f(x) dx = i \frac{d}{dp} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^p} f(x) dx = i \frac{d}{dp} (i^p \hat{f}(p))$$

Exemplo da Transformada de Fourier:

Exemplo 1: Seja $\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq a \\ 0, & \text{se } |x| > a \end{cases}$



$$\text{Logo } \hat{\chi}_a(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^p} \chi_a(x) dx = \int_{-a}^a e^{-ix^p} dx = \frac{e^{-ix^p}}{-i^p} \Big|_{-a}^a = \frac{e^{-ixa} - e^{ixa}}{-i^p} =$$

$$\frac{2}{p} \frac{e^{ixa} - e^{-ixa}}{2i} = 2 \frac{\sin(ax^p)}{p}.$$

Exemplo 2: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$. Vamos achar \hat{f} .

Sabemos que $\frac{d}{dx} (e^{-\frac{a}{2}x^2}) = -\frac{a}{2} 2x e^{-\frac{a}{2}x^2} = -ax e^{-\frac{a}{2}x^2} = -ax f(x)$.

Logo $f'(x) + ax f(x) = 0$.

Aplicando a transformada de Fourier na expressão acima, obtemos

(92)

$$\mathcal{F}(f'(x) + ax f(x)) = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(f'(x)) + a \mathcal{F}(x f(x)) = 0.$$

Logo $i \mathcal{F} \hat{f}(\mathcal{F}) + a i \frac{d\hat{f}}{d\mathcal{F}}(\mathcal{F}) = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{f}}{d\mathcal{F}}(\mathcal{F}) + \frac{\mathcal{F}}{a} \hat{f}(\mathcal{F}) = 0.$

Assim $\frac{\hat{f}'(\mathcal{F})}{\hat{f}(\mathcal{F})} = -\frac{\mathcal{F}}{a} \Rightarrow \int_0^{\mathcal{F}} \frac{\hat{f}'(y)}{\hat{f}(y)} dy = -\int_0^{\mathcal{F}} \frac{y}{a} dy \Rightarrow \ln \hat{f}(y) \Big|_0^{\mathcal{F}} = -\frac{\mathcal{F}^2}{2a}.$

Concluímos, assim, que $\ln(\hat{f}(\mathcal{F})) = \ln(\hat{f}(0)) - \frac{\mathcal{F}^2}{2a} \Rightarrow \hat{f}(\mathcal{F}) = \hat{f}(0) e^{-\frac{\mathcal{F}^2}{2a}}.$

Assim $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix \cdot 0} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2} x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$
 $y = \sqrt{\frac{a}{2}} x$
 $dy = \sqrt{\frac{a}{2}} dx$

Assim, $\hat{f}(\mathcal{F}) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\mathcal{F}^2}{2a}}$

Usando $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \Rightarrow I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \pi.$
 $\frac{d}{dr}(-\frac{1}{2} e^{-r^2})$

Logo $I = \sqrt{\pi}$

Exemplo 3 Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$, $a > 0$. Logo

$$\hat{f}(\mathcal{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\mathcal{F}}}{x^2 + a^2} dx$$

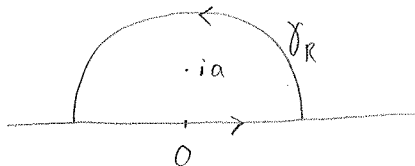
Se $\mathcal{F} < 0$

$$\hat{f}(\mathcal{F}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ix\mathcal{F}}}{x^2 + a^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-R}^R \frac{e^{-iz\mathcal{F}}}{z^2 + a^2} dz + \int_0^{\pi} \frac{e^{-iRe^{i\theta}\mathcal{F}}}{(Re^{i\theta})^2 + a^2} iRe^{i\theta} d\theta \right\} =$$

$-iR (\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta)^2 = R \sin \theta \mathcal{F} < 0$

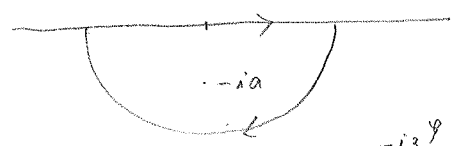
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-iz\mathcal{F}}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \left(\frac{e^{-iz\mathcal{F}}}{z^2 + a^2} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} (z-ia) \frac{e^{-iz\mathcal{F}}}{(z-ia)(z+ia)}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-a\mathcal{F}}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-a\mathcal{F}} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\mathcal{F}|}$$



de $\varphi > 0$, temos

$$f(\varphi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{e^{-iz\varphi}}{z^2+a^2} dz$$



$$= \underset{\substack{\text{pois o} \\ \text{sentido é} \\ \text{horário}}}{\uparrow} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-ia} \left(\frac{e^{-iz\varphi}}{z^2+a^2} \right) = -2\pi i \lim_{z \rightarrow -ia} (z+ia) \frac{e^{-iz\varphi}}{(z+ia)(z-ia)} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-a\varphi}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-a\varphi} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\varphi|}$$

Logo $\hat{f}(\varphi) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\varphi|}$

Vale a pena mencionar por fim o seguinte lema.

Lema de Riemann-Lebesgue: Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então $\lim_{\varphi \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\varphi) = 0$.

Assim, vemos que se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então $f \in C_0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, ou seja, f é contínua e tem limites iguais a zero quando $\varphi \rightarrow \pm\infty$.

Ideia da demonstração: Seja $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$

Logo $\chi(x + \frac{a+b}{2}) = \chi_{\frac{b-a}{2}}(x) \Rightarrow \chi(x) = \chi_{\frac{b-a}{2}}(x - \frac{a+b}{2})$

Assim, $\hat{\chi}(\varphi) = e^{-i\frac{a+b}{2}\varphi} \hat{\chi}_{\frac{b-a}{2}}(\varphi) = e^{-i\frac{a+b}{2}\varphi} 2 \frac{\sin((\frac{b-a}{2})\varphi)}{\varphi}$

Logo $\lim_{\varphi \rightarrow \pm\infty} \hat{\chi}(\varphi) = 0$. Portanto, o limite também é zero para combinações lineares de "funções degraus" (funções como χ). A demonstração segue usando o fato de que toda função $f \in L^1(\mathbb{R})$ pode ser aproximada por funções dessa forma. \square

Algumas analogias entre séries e transformadas de Fourier

Série de Fourier: Seja $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$. Logo a ideia é escrever f como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in x}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in x} dx.$$

Podemos ver a série de Fourier como uma função $\mathcal{F}: L^1([- \pi, \pi]) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$, (99)

em que $L^1([- \pi, \pi]) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty \right\}$.

$l_\infty(\mathbb{Z}) := \left\{ (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}; \exists M > 0 \text{ t.q. } |c_n| \leq M, \forall n \right\}$.

Esta função é dada por $\mathcal{F}(f) = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, em que $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(\theta) d\theta$.

Novamente \mathcal{F} é uma transformação linear, pois se $\mathcal{F}(f) = (c_n)$ e $\mathcal{F}(g) = (d_n)$, então $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = (\alpha c_n + \beta d_n) = \alpha (c_n) + \beta (d_n) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$.

Além disso, temos $\mathcal{F}(f') = (in c_n)$.

Logo	Série de Fourier	Transformada de Fourier
	$\mathcal{F}: L^1([- \pi, \pi]) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z})$	$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$
	$\mathcal{F}(f) = (c_n)_n \Rightarrow \mathcal{F}(f') = (in c_n)_n$	$\mathcal{F}(f) = \hat{f} \Rightarrow \mathcal{F}(f')(\xi) = i \xi \hat{f}(\xi)$

Observamos que se $f \in L^1([- \pi, \pi])$ for contínua e suave por partes, então

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad \theta \in]-\pi, \pi[$$

Assim, podemos definir $\mathcal{F}^{-1}: l_\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow L^1([- \pi, \pi])$ por

$$\mathcal{F}^{-1}((c_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

Logo \mathcal{F}^{-1} , de fato, é a inversa de \mathcal{F} restrita às funções contínuas e suaves por partes, ou seja,

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f, \text{ se } f \text{ é contínua e suave por partes.}$$

Pergunta: Qual é o análogo de \mathcal{F}^{-1} para a transformada de Fourier? Uma es-

colha possível é

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Note, no entanto, que \hat{f} não precisa ser necessariamente uma função em $L^1(\mathbb{R})$. O problema é, então, delicado.

Teorema de Inversão de Fourier.

(95)

Motivação: duvamos $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\varphi} \hat{f}(\varphi) d\varphi$. Assim,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\varphi} f(y) dy d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\varphi} d\varphi \right) f(y) dy \quad \varphi \mapsto e^{i(x-y)\varphi} \notin L^1(\mathbb{R}).$$

Solução recorrer $f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\varphi} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\varphi^2} \hat{f}(\varphi) d\varphi$. Problema.

$$\text{Logo } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\varphi} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\varphi^2} d\varphi \right) f(y) dy, \quad \varphi \mapsto e^{i(x-y)\varphi} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\varphi^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Logo, assim, o seguinte Teorema

Teorema de Inversão de Fourier: Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ e contínua por partes. Logo

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\varphi} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\varphi^2} \hat{f}(\varphi) d\varphi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então f é contínua e $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\varphi} \hat{f}(\varphi) d\varphi, \quad x \in \mathbb{R}.$

Usamos na demonstração o Teorema de Fubini:

Seja $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. As seguintes condições são equivalentes
 a) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)| dx dy < \infty$, b) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)| dy \right) dx < \infty$, c) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)| dx \right) dy < \infty$.

Se qualquer uma das condições acima não é válida, então
 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx \right) dy$.

Demo do Teorema: Logo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\varphi} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\varphi^2} \hat{f}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\varphi} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\varphi^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\varphi} f(y) dy \right) d\varphi =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi(y-x)} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\varphi^2} d\varphi \right) f(y) dy.$$

Observamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-y)} e^{-\frac{\xi^2 y^2}{2}} d\xi = \mathcal{F}\left(e^{-\frac{\xi^2 y^2}{2}}\right)(y-x) \stackrel{\text{usando qm}}{=} \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{ax^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{y^2}{2a}}$$

$$a = \varepsilon^2$$

(96)

Logo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y} e^{-\frac{\xi^2 y^2}{2}} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}} f(y) dy$$

Logo observamos que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2\varepsilon^2}} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \sqrt{2\pi} \varepsilon = 1$. Como $w \mapsto e^{-\frac{w^2}{2\varepsilon^2}}$ é função par concluímos que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{w^2}{2\varepsilon^2}} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_0^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2\varepsilon^2}} dw = \frac{1}{2}$.

Logo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}} f(y) dy - \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}} (f(y) - f(x^-)) dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_x^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}} (f(y) - f(x^+)) dy$$

Notemos agora que para todo $R > 0$, temos

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_x^{x+R} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}} (f(y) - f(x^+)) dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_{x+R}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}} (f(y) - f(x^+)) dy \right| \leq$$

$$\sup_{y \in [0, R]} |f(y) - f(x^+)| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_x^{x+R} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}} dy \right) + \sup_{y \geq x+R} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}} \right) \int_{x+R}^{\infty} |f(y)| dy + |f(x^+)| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_{x+R}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}} dy \leq$$

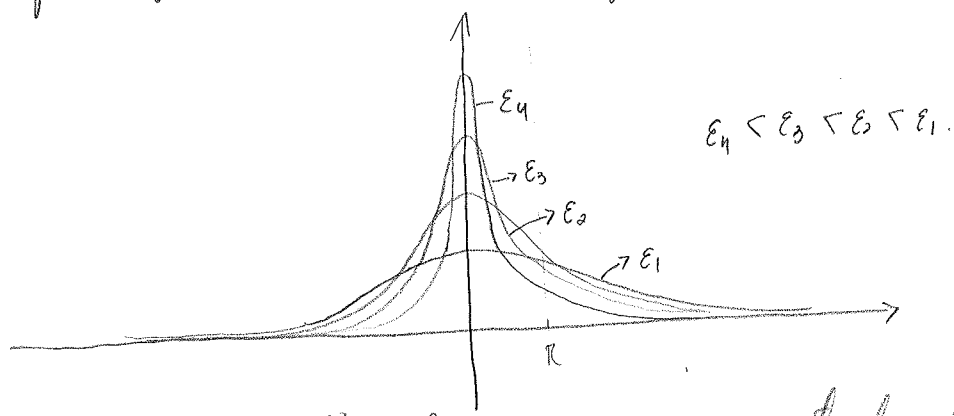
$$\sup_{y \in [0, R]} |f(y) - f(x^+)| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} dt \right) + \sup_{t \geq R} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy + |f(x^+)| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_R^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} dt \leq$$

$$\frac{1}{2} \sup_{y \in [0, R]} |f(y) - f(x^+)| + \sup_{t \geq R} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} \right) \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \int_R^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} dt \right) |f(x^+)|$$

Como $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) = f(x^+)$, podemos escolher $R > 0$ pequeno t.q. $\frac{1}{2} \sup_{y \in [0, R]} |f(y) - f(x^+)|$ seja tão pequeno quanto se quiser. Depois de escolher R , escolhemos $\varepsilon > 0$ pequeno tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} \right) \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} \int_R^\infty e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} dt \right) |f(x^+)|$$
 seja tão pequeno quanto se quiser

Isso é possível pois $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}$ tem a seguinte expressão



Logo a função $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}$ está cada vez mais concentrada sobre 0. Logo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-\frac{R^2}{2\varepsilon^2}} = 0$$
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}} dt = 0$$

Concluímos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-\frac{\varepsilon^2 y^2}{2}} \hat{f}(y) dy = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))$.

Se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-\frac{\varepsilon^2 y^2}{2}} \hat{f}(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (e^{ixy} e^{-\frac{\varepsilon^2 y^2}{2}}) \hat{f}(y) dy =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \hat{f}(y) dy$$

Logo $\frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \hat{f}(y) dy$. (= $f(x)$, na ponto em que f é contínua).

Mas $f(x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2} \hat{f}(y) dy = \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2} \hat{f}(y) dy = f(x^-)$. Logo f é contínua.

$$\text{Assim } f(x) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \hat{f}(y) dy$$



De maneira semelhante podemos provar o seguinte resultado

(98)

Teorema: Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e é maior por partes, então

$$\lim_{\pi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ixy} \hat{f}(y) dy = \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)]$$

Vemos novamente que existe uma analogia entre nós de Fourier e transformado de

Fourier.

Série de Fourier	Transformado de Fourier
<ul style="list-style-type: none"> Se f é maior por partes, então $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$	<ul style="list-style-type: none"> Se f é maior por partes e $L^1(\mathbb{R})$, então $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \hat{f}(y) dy$
<ul style="list-style-type: none"> Se f, g não maior por partes e $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx = d_n, \forall n,$ <p>então $f = g$ no ponto de continuidade, pois $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx} = g(x)$</p>	<ul style="list-style-type: none"> Se f, g não $L^1(\mathbb{R})$ e maior por partes $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ixy} dx = \hat{g}(y), \forall y,$ <p>então $f = g$ no ponto de continuidade, pois</p> $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{-ixy} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(y) e^{-ixy} dy$

Observação: A unicidade vale para funções ainda mais regulares.

Exemplo de funções f tais que $f, f \in L^1(\mathbb{R})$.

Se $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$, então $f, \mathcal{F}f, \mathcal{F}^2 f$ são limitadas. Logo

$$\forall y \quad |(1+y^2)\hat{f}(y)| \leq C \Rightarrow |\hat{f}(y)| \leq \frac{C}{1+y^2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)| dy \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{1+y^2} dy < \infty.$$

Transformado de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$

Lembramos que se $f \in L^2([-\pi, \pi]) \subset L^1([-\pi, \pi])$, então vale o

identidade de Parseval

(99)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Podríamos nos perguntar: Existe alguma relação análoga para a transformada de Fourier? Sim!

Proposição: Sejam f e g funções, que não L^1 e tais, que f, g também sejam funções de $L^2(\mathbb{R})$. Logo

$$\boxed{2\pi \langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle,}$$

em que $\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x) dx$.

Em particular,

$$\boxed{2\pi \|f\|_{L^2}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2}^2,}$$

em que $\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

Formula de Parseval
(mesmo nome).

Observação: Precisamos que $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ para que \hat{f} e \hat{g} sejam rentidos.

Notamos que se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então $f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f})(-x)$. Logo f é limitado e L^1 .

$$\text{Logo } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |\hat{f}(x)| dx \leq \|f\|_{L^\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)| dx \leq \|f\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} < \infty.$$

Assim $f \in L^2(\mathbb{R})$. Da mesma forma $g \in L^2(\mathbb{R})$. Logo o produto interno

$\langle f, g \rangle$ faz sentido.

Demonstração:

Basta fazer a conta!

De fato,

$$2\pi \langle f, g \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+ixy} \hat{g}(y) dy \right) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \overline{\hat{g}(y)} dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx \right) \overline{\hat{g}(y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \overline{\hat{g}(y)} dy =$$

$$= \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

Tubini, pois

$$\iint |e^{-ixy} f(x) \overline{\hat{g}(y)}| dx dy \leq \|f\|_{L^1} \|\hat{g}\|_{L^1} < \infty.$$

Se $f = g$, então $\|f\|_{L^2}^2 = 2\pi \|\hat{f}\|_{L^2}^2$. [2]

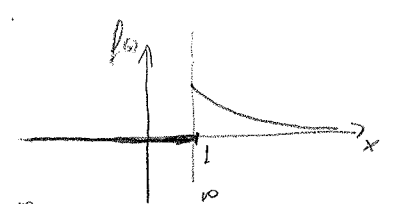
Assim, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$; análogo a $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy$.

Do mesmo jeito que definimos o série de Fourier para funções de $L^2([-\pi, \pi])$, vemos que se $f \in L^2([-\pi, \pi])$, então $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = f(x)$ em $L^2([-\pi, \pi])$, queremos

definir o transformado de Fourier de funções em $L^2(\mathbb{R})$.

Mas temos um problema! $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$. Logo a transformado de Fourier não está automaticamente definida em $L^2(\mathbb{R})$.

Exemplo: Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$



Logo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_1^{\infty} = \infty$, mas $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 1$.

Concluimos que $f \in L^2(\mathbb{R})$, mas $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

(101)

Assim, temos um problema, já que $\int e^{ix^2} f(x) dx$ não está bem definida para toda função em $L^2(\mathbb{R})$.

A solução é, dada uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, aproximar f por funções que pertençam a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, ou seja, por funções para as quais a transformada de Fourier esteja bem definida.

Um exemplo: se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então temos $\chi_\pi f \rightarrow f$, $\pi \rightarrow \infty$ em L^2 , em $e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}x^2} f(x) \rightarrow f$, $\varepsilon \rightarrow 0$

que $\chi_\pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$. Como $\chi_\pi f$ e $e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}x^2} f$ são funções de L^1 , então a

transformada de Fourier está bem definida. Assim, temos

Definição: Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Definimos a transformada de Fourier de f como

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{\pi \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2} \chi_\pi(x) f(x) dx = \lim_{\pi \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix^2} f(x) dx$$

ou

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}x^2} f(x) dx,$$

em que os limites são em $L^2(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\lim_{\pi \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{F}(f) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix^2} f(x) dx \right\|_{L^2}^2 = \lim_{\pi \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}(f)(\eta) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix^2} f(x) dx \right|^2 d\eta = 0.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \mathcal{F}(f) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix^2} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}x^2} f(x) dx \right\|_{L^2}^2 = 0.$$

Observação: Dado $f \in L^2(\mathbb{R})$, poderíamos usar qualquer sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

que convergisse a f em $L^2(\mathbb{R})$ e definir

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_n) \text{ em } L^2(\mathbb{R}).$$

A definição de $\mathcal{F}(f)$ independe de f . Todas as definições anteriores coincidem. (102)

Assim temos o seguinte Teorema (não vamos demonstrá-lo).

Teorema: Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então $\mathcal{F}(f)$ definido anteriormente também pertence a $L^2(\mathbb{R})$.

O transformado de Fourier $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ é uma transformação linear bijetora cujo inverso é dado por

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\pi \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\eta} \hat{f}(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta} e^{-\frac{\epsilon^2 \eta^2}{2}} \hat{f}(\eta) d\eta,$$

em que o limite é dado em $L^2(\mathbb{R})$.

Além disso, as relações de Parseval continuam valendo:

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle \quad \text{e} \quad \|\hat{f}\|^2 = 2\pi \|f\|^2, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

O Teorema acima é chamado de Teorema de Parseval.

Observações:

1) Se $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, então

$$\mathcal{F}(f)(\eta) = \lim_{\pi \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\eta} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\eta} e^{-\frac{\epsilon^2 x^2}{2}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\eta} f(x) dx,$$

ou seja, as definições de Transformado de Fourier em L^1 e em L^2 coincidem em $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

2) Vamos que $v, \hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, $v, f \in L^2(\mathbb{R})$, então podemos escrever f em função de \hat{f} , ou seja, temos $f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$. Pelas fórmulas anteriores

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(g)(-x). \quad (\Leftrightarrow \mathcal{F}(g)(\eta) = 2\pi \mathcal{F}^{-1}(g)(-\eta))$$

Vamos usar isto para calcular alguns transformados de Fourier.

Exemplo 1: Sabemos que $\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\eta|}$.

$$\text{Logo } \mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \frac{a}{\pi} \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{a} e^{-a|x|}\right) = \frac{a}{\pi} 2\pi \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\pi}{a} e^{-a|x|}\right)(-x) = 2a \frac{1}{(\eta^2+a^2)}.$$

$$\text{Logo } \mathcal{F}(e^{-a|x|}) = 2 \frac{a}{\eta^2+a^2}.$$

Exemplo 2 sabemos que $\mathcal{F}(X_a)(\xi) = 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}$, em que $X_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$.

(103)

Logo $\mathcal{F}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right) = \frac{1}{2} \mathcal{F}\left(2 \frac{\sin(ax)}{x}\right) = \frac{1}{2} 2\pi \mathcal{F}^{-1}\left(2 \frac{\sin(ax)}{x}\right)(-\xi) =$
 $= \pi X_a(-\xi) = \pi X_a(\xi).$

Note que no exemplo 1), $\frac{1}{x^2+a^2}$, $e^{-a|x|} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

no exemplo 2), $X_a \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, mas $\frac{\sin(ax)}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$ e $\frac{\sin(ax)}{x} \in L^2(\mathbb{R})$.

Assim, precisamos definir o transformado de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$ para definir $\mathcal{F}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)$. Porém, calcular usando diretamente nessa definição seria muito complicado.

Existem outras convenções para o transformado de Fourier. Mas a teoria é a mesma.

Exemplos: $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx$, $\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$

Produto de Convolução

Encontramos anteriormente expressões da forma:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(n, \theta - \phi) f(\phi) d\phi$$

Fórmula de Poisson

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}} f(y) dy$$

Demonstração da fórmula de
inversão de Fourier

As expressões acima nos motivam a seguinte definição

Definição: Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções. Definimos a $f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$$

sempre que o integral existe.

$f * g$ é chamado de produto de convolução de f e g .

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy} e^{-i\varphi(x-y)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \right) dx = \text{Fubini}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy} g(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi(x-y)} f(x-y) dx \right) dy \stackrel{z=x-y}{=} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\varphi} g(y) dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz\varphi} f(z) dz \right) =$$

$$\mathcal{F}(g)(\varphi) \mathcal{F}(f)(\varphi). \text{ Logo } (f * g)^{\wedge} = \hat{f} \hat{g}.$$

Pelo mesmo argumento, se definirmos $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\varphi} f(\varphi) d\varphi$, temos

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f} * \tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}) \mathcal{F}^{-1}(\tilde{g})$$

$$\text{Logo } \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f} * \tilde{g})) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}) \mathcal{F}^{-1}(\tilde{g})) \Rightarrow \tilde{f} * \tilde{g} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}) \mathcal{F}^{-1}(\tilde{g}))$$

Logo que $\tilde{f} = \mathcal{F}(f)$ e $\tilde{g} = \mathcal{F}(g)$. Logo

$$\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))),$$

ou seja,

$$\mathcal{F}(fg) = 2\pi \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Esta operação vale sempre que a transformada de Fourier e sua inversa estejam bem definidas nas funções acima: f, g, fg e etc.

Concluimos que

$$\begin{aligned} (f * g)^{\wedge} &= \hat{f} \hat{g} \\ (fg)^{\wedge} &= 2\pi \hat{f} * \hat{g} \end{aligned}$$

Logo a transformada de Fourier leva convolução em multiplicação, multiplicação em convolução.

As relações acima valem, por exemplo, para quaisquer funções em $L^2(\mathbb{R})$.

Uma propriedade muito importante das convoluções é permitir "aproximar" funções (107) por funções mais regulares. Já vimos isto anteriormente na demonstração da transformada inversa. Vamos agora sistematizar.

Proposição: Suponha que f seja diferenciável, $f * g$ e $f' * g$ estejam bem definidos.

Logo $f * g$ é diferenciável e $(f * g)' = f' * g$. Analogamente, se g é diferenciável e $f * g$ e $f * g'$ estão bem definidos, temos $(f * g)' = f * g'$.

Demonstração: Se f é diferenciável.

$$\frac{d}{dx} (f * g)(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-y) g(y) dy = (f' * g)(x).$$

Se g é diferenciável.

$$\frac{d}{dx} (f * g)(x) = \frac{d}{dx} (g * f)(x) = (g' * f)(x) = (f * g')(x). \quad \square$$

Proposição: Seja g uma função contínua tal que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$.

(Logo $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$). Vamos definir $g_\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ por $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$.

Logo se $f \in L^1(\mathbb{R})$ é contínua, então

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * g_\epsilon(x) = f(x).$$

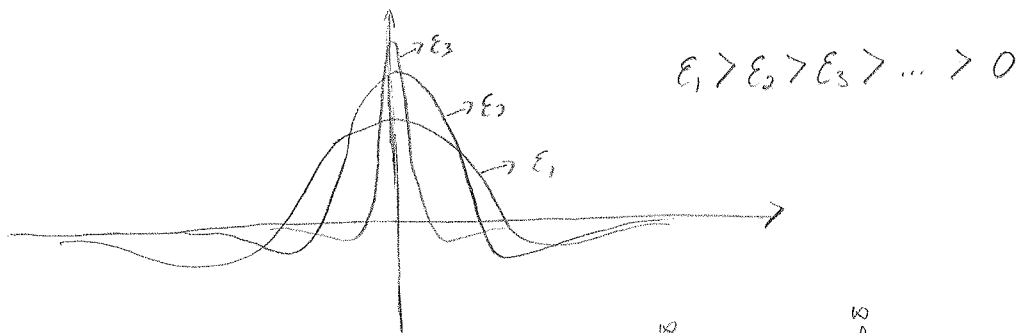
Em particular, se g_ϵ for diferenciável (ou mesmo de classe C^k), então $f * g_\epsilon$ é diferenciável (ou de classe C^k). Portanto f pode ser aproximada por funções diferenciáveis ou mesmo de classe C^k , $0 \leq k \leq \infty$.

Demonstração: A ideia da demonstração já vimos anteriormente.

Primeiramente, observamos que $\int_{-\infty}^{\infty} g_{\epsilon}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = 1.$ (108)

$y = \frac{x}{\epsilon}$
 $dy = \frac{1}{\epsilon} dx$

Também vemos que a função g_{ϵ} se "acumula" em 0:



$$\text{Logo } f * g_{\epsilon}(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g_{\epsilon}(y) dy - f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g_{\epsilon}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x)) g_{\epsilon}(y) dy =$$

$$= \int_{-R}^R (f(x-y) - f(x)) g_{\epsilon}(y) dy + \int_{|y| > R} f(x-y) g_{\epsilon}(y) dy - \int_{|y| > R} f(x) g_{\epsilon}(y) dy$$

$$\text{Assim } |f * g_{\epsilon}(x) - f(x)| \leq \left(\sup_{|y| \leq R} |f(x-y) - f(x)| \right) \left(\int_{-R}^R |g_{\epsilon}(y)| dy \right) + \sup_{|y| > R} |g_{\epsilon}(y)| \int_{-R}^R |f(y)| dy + |f(x)| \int_{|y| > R} |g_{\epsilon}(y)| dy.$$

Agora basta escolher R tq. $\sup_{|y| \leq R} |f(x-y) - f(x)|$ seja pequeno. Depois de fixar R , escolhamos ϵ tal que $\sup_{|y| > R} |g_{\epsilon}(y)|$ e $\int_{|y| > R} |g_{\epsilon}(y)| dy$ sejam pequenos. Concluímos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * g_{\epsilon}(x) = f(x)$$

Observamos que se g é diferenciável, $(f * g_{\epsilon})'(x) = (f * g'_{\epsilon})(x)$, ou seja, $f * g_{\epsilon}$ também o é.

Exemplo: $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Neste caso temos $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$.

(109)

Logo $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi x} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\varphi^2} \hat{f}(\varphi) d\varphi = f * g_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Resoltemos a fórmula

de inversão do transformado de Fourier para $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Observação: Existem muitos outros Teoremas de Aproximação. Aqui foi dado apenas um exemplo.

Aplicações do Transformado de Fourier.

Resolução de EDO's:

Digamos que queremos resolver $\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k u}{dx^k}(x) = f(x)$, em que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Resolução: $\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k u}{dx^k}(x) = f(x) \Rightarrow \mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k u}{dx^k}(x)\right) = \mathcal{F}(f(x))$.

Logo $\sum_{k=0}^n a_k (i\varphi)^k \hat{u}(\varphi) = \hat{f}(\varphi) \Rightarrow \hat{u}(\varphi) = \frac{\hat{f}(\varphi)}{\sum_{k=0}^n a_k (i\varphi)^k}$.

Portanto, se o polinômio $\varphi \mapsto \sum_{k=0}^n a_k (i\varphi)^k$ não tiver zeros reais, concluímos que

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\varphi} \frac{\hat{f}(\varphi)}{\sum_{k=0}^n a_k (i\varphi)^k} d\varphi.$$

Exemplo: $\frac{d^2 u}{dx^2}(x) - u(x) = f(x)$. Neste caso, temos

$$(i\varphi)^2 \hat{u}(\varphi) - \hat{u}(\varphi) = \hat{f}(\varphi) \Rightarrow \hat{u}(\varphi) = -\frac{\hat{f}(\varphi)}{1 + \varphi^2}$$

Portanto, $u(x) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\varphi} \frac{\hat{f}(\varphi)}{1 + \varphi^2} d\varphi$

Usando convolução, temos

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(-\frac{\hat{f}(\mathcal{F})}{1+\mathcal{F}^2} \right) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{1+\mathcal{F}^2} \hat{f}(\mathcal{F}) \right) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{1+\mathcal{F}^2} \right) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\mathcal{F})) =$$

$$= -\frac{1}{2} (e^{-|x|}) * f(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} f(y) dy //$$

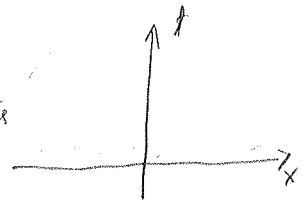
→ como $\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+\mathcal{F}^2}$

• Equação do Calor em \mathbb{R} :

Devemos resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Não há mais condições do contorno!



Como resolver? Aplicando transformado de Fourier.

Vamos aplicar na variável x .

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right) = \mathcal{F} \left(k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \right) \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \mathcal{F}) = k (i\mathcal{F})^2 \hat{u}(t, \mathcal{F})$$

$$\text{Logo } \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t, \mathcal{F}) = -k\mathcal{F}^2 \hat{u}(t, \mathcal{F}) \Rightarrow \hat{u}(t, \mathcal{F}) = \hat{u}(0, \mathcal{F}) e^{-k\mathcal{F}^2 t}$$

$$\text{Usamos que } \frac{du}{dt}(t) = C u(t) \Rightarrow u(t) = u(0) e^{Ct}$$

$$\text{Porém } u(0, x) = f(x). \text{ Assim, } \hat{u}(0, \mathcal{F}) = \hat{f}(\mathcal{F}). \text{ Isso implica que } \hat{u}(t, \mathcal{F}) = \hat{f}(\mathcal{F}) e^{-k\mathcal{F}^2 t}$$

$$\text{Logo } u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\mathcal{F}} e^{-k\mathcal{F}^2 t} \hat{f}(\mathcal{F}) d\mathcal{F}$$

Usando convolução, temos

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-k\mathcal{F}^2 t} \hat{f}(\mathcal{F}) \right) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-k\mathcal{F}^2 t} \right) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\mathcal{F})) =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\pi kt}} \left(e^{-\frac{1}{4kt} x^2} * f(x) \right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) dy.$$

→ como $\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2a}}) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\mathcal{F}^2}{2a}}$

Então sempre usando que $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g} \Rightarrow f * g = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \hat{g})$.

Se $f \mapsto \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$ e $g \mapsto \mathcal{F}^{-1}(\hat{g})$, temos $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \hat{g}) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{g})$

Se definirmos a função $K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$, então concluímos que

$$u(t, x) = K_t * f(x)$$

Conclusão: A função u acima de fato é solução do problema.

De fato, $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \left(\frac{\partial K_t}{\partial t}(x) - k \frac{\partial^2 K_t}{\partial x^2}(x) \right) * f(x) = 0$, pois

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_t(x) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4kt}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi k t^3}} \frac{x^2}{4kt^2} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \\ \frac{\partial}{\partial x} K_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} \frac{-2x}{4kt} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} \frac{-1}{2kt} e^{-\frac{x^2}{4kt}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi k t^3} (4kt)^2} 4x^2 e^{-\frac{x^2}{4kt}} \\ k \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_t(x) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} t^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4kt}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi k t^3}} \frac{x^2}{4kt^2} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \end{aligned} \right\} \frac{\partial}{\partial t} K_t(x) - k \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_t(x) = 0.$$

Além disso, se $f \in L^1(\mathbb{R})$ for contínua, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0} K_t * f(x) = f(x),$$

pois $\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |K_t(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx = 1$, K_t é contínua e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} K_t(x) = 0$.

Logo $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = f(x)$, ou seja, a condição $u(0, x) = f(x)$ está satisfeita

no sentido de que $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = f(x)$.

Se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então $u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-k\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi$.

Logo $u(0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi = f(x)$.

Propriedade de Semigrupo da Equação do Calor:

Seja u solução do problema $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.
 $u(0, x) = f(x)$

Logo, seja $v:]0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $v(t, x) = u(t+s, x)$. Assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}(u(t+s, x)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t+s, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t+s, x) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x). \\ v(0, x) = u(s, x). \end{cases}$$

Concluímos que a solução do $\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)$ é dada por $v(t, x) = u(t+s, x)$.
 $v(0, x) = u(s, x)$

Assim vimos que $u(t, x) = K_t * f$ e $v(t, x) = K_t * (u(s, x))$. Logo
 $(K_{t+s} * f)(x) = u(t+s, x) = v(t, x) = K_t * (u(s, x)) = K_t * (K_s * f) = (K_t * K_s) * f$.

Assim, esperamos que $K_{t+s} = K_t * K_s$. Se provarmos isto, conseguimos outra demonstração de que $v(t, x) = u(t+s, x)$. Vamos provar que $K_{t+s} = K_t * K_s$ diretamente.

1ª Demonstração

$$K_t * K_s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-y) K_s(y) dy = \frac{1}{4\pi k} \frac{1}{\sqrt{st}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} e^{-\frac{y^2}{4ks}} dy \quad (*)$$

$$\text{Mas } \frac{(x-y)^2}{4kt} + \frac{y^2}{4ks} = \frac{1}{4kst} \left\{ sx^2 - 2xys + sy^2 + ty^2 \right\} = \frac{1}{4kst} \left\{ (t+s)y^2 - 2xsy + sx^2 \right\} =$$

$$\frac{(t+s)}{4kst} \left\{ y^2 - \frac{2xs}{t+s} y + \frac{s}{t+s} x^2 \right\} = \frac{(t+s)}{4kst} \left\{ \left(y - \frac{xs}{t+s}\right)^2 - \frac{x^2 s^2}{(t+s)^2} + \frac{sx^2}{t+s} \right\} =$$

$$\frac{(t+s)}{4kst} \left\{ \left(y - \frac{xs}{t+s}\right)^2 + \frac{tsx^2}{(t+s)^2} \right\} = \frac{(t+s)}{4kst} \left(y - \frac{xs}{t+s}\right)^2 + \frac{x^2}{4k(t+s)}. \text{ Logo}$$

$$(*) = \frac{1}{4\pi k} \frac{1}{\sqrt{st}} e^{-\frac{x^2}{4k(t+s)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t+s)}{4kst} \left(y - \frac{xs}{t+s}\right)^2} dy = \frac{1}{4\pi k} \frac{1}{\sqrt{st}} e^{-\frac{x^2}{4k(t+s)}} \sqrt{4\pi k} \frac{\sqrt{st}}{\sqrt{t+s}} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t+s)}{4kst} w^2} dw = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \sqrt{\frac{4kst}{s+t}} = \sqrt{4k\pi} \sqrt{\frac{st}{s+t}}$$

$z = \sqrt{\frac{t+s}{4kst}} w$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t+s)}} e^{-\frac{x^2}{4k(t+s)}} = K_{t+s}(x).$$

2ª Demonstração

$$K_t * K_s = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(K_t * K_s)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(K_t) \mathcal{F}(K_s)) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k\mathcal{F}^2 t} e^{-k\mathcal{F}^2 s}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k\mathcal{F}^2(t+s)}) = K_{t+s} \quad \square$$

Equação do Lado em \mathbb{R}

Queremos resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Para tanto, vamos aplicar transformada de Fourier na variável x .

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x)\right) = c^2 \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t, \mathcal{F}) = -c^2 \mathcal{F}^2 \hat{u}(t, \mathcal{F})}$$

Usamos $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathcal{F}u) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}$, $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = (i\mathcal{F})^2 \mathcal{F}(u) = -\mathcal{F}^2 \hat{u}$.

Devemos resolver em t !

$$\hat{u}(t, \mathcal{F}) = A(\mathcal{F}) \cos(c t \mathcal{F}) + B(\mathcal{F}) \sin(c t \mathcal{F})$$

Porém, $u(0, x) = f(x) \Rightarrow \hat{u}(0, \mathcal{F}) = \hat{f}(\mathcal{F})$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x) \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \mathcal{F}) = \hat{g}(\mathcal{F})$$

Logo $\hat{u}(0, \mathcal{F}) = A(\mathcal{F}) = \hat{f}(\mathcal{F})$ $\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}(t, \mathcal{F}) = \hat{f}(\mathcal{F}) \cos(c t \mathcal{F}) + \hat{g}(\mathcal{F}) \frac{\sin(c t \mathcal{F})}{c \mathcal{F}} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \mathcal{F}) = c \mathcal{F} B(\mathcal{F}) = \hat{g}(\mathcal{F}) \end{array} \right.$

Vamos inverter e achar $u(t, x)$, para $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\mathcal{F}) \cos(c t \mathcal{F})) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\mathcal{F}) \left(\frac{e^{i c t \mathcal{F}} + e^{-i c t \mathcal{F}}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct))$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\mathcal{F}) e^{i c t \mathcal{F}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x+ct)\mathcal{F}} \hat{f}(\mathcal{F}) d\mathcal{F} = f(x+ct)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\mathcal{F}) e^{-i c t \mathcal{F}}) = f(x-ct)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(\mathcal{F}) \frac{\sin(c t \mathcal{F})}{c \mathcal{F}}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(c t \mathcal{F})}{c \mathcal{F}}\right) * g = \frac{t}{2ct} \chi_{ct} * g = \frac{t}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \chi_{ct}(y) dy$$

$$\mathcal{F}(\chi_a) = 2a \frac{\sin(a\mathcal{F})}{a\mathcal{F}} \rightarrow$$

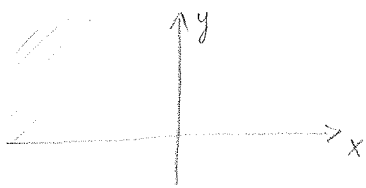
$$= \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g(x-y) dy = \frac{1}{2c} (G(x-ct) - G(x+ct)), \text{ em que } G \text{ é uma primitiva (114)}$$

de g , ou seja, $G' = g$.

Assim,
$$u(t, x) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} (G(x+ct) - G(x-ct)).$$

Resoltemos a fórmula de d'Alembert.

• Problema de Dirichlet no semi-plano $[\mathbb{R} \times]0, \infty[$



Queremos resolver o problema:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Como $x \in \mathbb{R}$, vamos tomar o transformado de Fourier em x :

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \right) = 0 \Rightarrow -\mathcal{F}^2 \hat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) = 0$$

$$\text{Logo } \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) = \mathcal{F}^2 \hat{u}(\xi, y) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) = |\mathcal{F}|^2 \hat{u}(\xi, y).$$

$$\text{Assim, } \hat{u}(\xi, y) = C_1(\xi) e^{y|\mathcal{F}|} + C_2(\xi) e^{-y|\mathcal{F}|}.$$

Vamos supor, para obter unicidade, que u é limitado (Note que se u é solução do problema, então $u(x, y) + y$ também é solução. Mas a função y não é limitada. E supomos que a solução é limitada, toma unicidade. Não provaremos isto).

Como $y \mapsto e^{y|\mathcal{F}|}$ cresce muito rápido em y e queremos soluções limitadas, vamos supor $C_1(\xi) = 0$. Logo $\hat{u}(\xi, y) = C_2(\xi) e^{-y|\mathcal{F}|}$.

$$\text{Mas, } u(x, 0) = f(x) \Rightarrow \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

$$\text{Logo } \hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-y|\mathcal{F}|}.$$

Deito forma,

$$u(x,y) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi) e^{-y|\xi|}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-y|\xi|}) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) =$$

$$\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{\xi^2 + y^2}\right) = \frac{\pi}{y} e^{-y|\xi|} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(e^{-y|\xi|}) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + \xi^2} \right).$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{y}{y^2 + x^2}\right) * (f(x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2} f(t) dt.$$

$$\text{Logo } u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(y^2 + (x-t)^2)} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(y^2 + t^2)} f(x-t) dt$$

Seja $P_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}$. Logo $u(x,y) = P_y * f(x)$.

Observação:

1) Podemos verificar que u é solução, pois $\Delta u(x,y) = \Delta(P_y * f) = (\Delta P_y) * f = 0$.

Note que $\Delta P_y = 0$, pois $\pi P_y(x) = \frac{y}{y^2 + x^2}$. Logo

$$\pi \frac{\partial}{\partial y} (P_y(x)) = \frac{1}{y^2 + x^2} - \frac{2y^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\pi \frac{\partial^2}{\partial y^2} (P_y(x)) = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} 2y = \frac{-2x^2y - 2y^3 - 2x^2y + 2y^3}{(x^2 + y^2)^3} = -\frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\pi \frac{\partial}{\partial x} (P_y(x)) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\rightarrow \Delta P_y(x) = 0.$$

$$\pi \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P_y(x)) = \frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^3}$$

2) Noteamos que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_y(x) = 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |P_y(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{x}{y})^2 + 1} \frac{dx}{y} =$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + z^2} dz = \frac{1}{\pi} \arctan z \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 1.$$

Logo se $f \in L^1(\mathbb{R})$, é contínua, temos $\lim_{y \rightarrow 0} P_y * f(x) = f(x)$. (usamos resultados de convolução).

(Note que $P_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Logo $\frac{1}{y} P_1\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \frac{1}{\pi\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right)} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{y} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} = P_y(x)$)

Concluímos que $\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = f(x)$.

3) Observamos que se $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$|u(x, y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(y^2 + t^2)} f(x-t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(y^2 + t^2)} |f(x-t)| dt \leq M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(y^2 + t^2)} dt = M.$$

Concluímos que $|u(x, y)| \leq M$.

O análogo ocorre para a bola (exercício para entregar) e em abertos limitados com contorno suave.

Problemas de Sturm-Liouville

Lembramos que o problema de Sturm-Liouville é de forma

$$\frac{d}{dx} \left(\pi(x) \frac{df}{dx}(x) \right) + p(x)f(x) + \lambda w(x)f(x) = 0$$

$$B_1(f) = B_2(f) = 0 \quad \text{com} \quad \pi(f' \bar{g} - f \bar{g}') \Big|_a^b = 0, \quad \forall f, g \quad \text{com} \quad B_1(f) = B_2(g) = 0.$$

Se $\pi = 1, p = 0, w = 1$, temos $\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda f(x) = 0$.

$\text{Vamos que } \begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0 \\ f(0) = f(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \end{cases}$	$f \in L^2(0, l), \text{ então } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$
$\begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0 \\ f'(0) = f'(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \end{cases}$	$f \in L^2(0, l), \text{ então } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$
$\begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + \lambda f(x) = 0 \\ f(0) = f(l), f'(0) = f'(l) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_n(x) = e^{i \frac{2n\pi}{l}x} \\ \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{l}\right)^2 \end{cases}$	$f \in L^2(0, l), \text{ então } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi}{l}x}$

Vamos agora estudar os problemas análogos em \mathbb{R} e $[0, \infty[$

Em \mathbb{R}

Em \mathbb{R} , temos $X''(x) + \lambda X(x) = 0, x \in]-\infty, \infty[$.

Usando as soluções $X(x) = e^{ix\sqrt{\lambda}}, \lambda = \lambda^2$, vemos que se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\varphi} \hat{f}(\varphi) d\varphi \quad (\text{Transformada de Fourier!})$$

(117)

Note que o integral é entendido como o seguinte limite em $L^2(\mathbb{R})$: $\lim_{\pi \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\varphi} \hat{f}(\varphi) d\varphi$.

Em $]0, \infty[$

Vamos já considerar $\lambda = \varphi^2$. Logo em $]0, \infty[$, temos

$$X''(x) + \varphi^2 X(x) = 0, \quad x \in]0, \infty[$$

Condição de Dirichlet.

$$X(0) = 0$$

$$X''(x) + \varphi^2 X(x) = 0, \quad x \in]0, \infty[$$

Condição de Neumann.

$$X'(0) = 0$$

Note que para o problema de Dirichlet temos $X(x) = \sin(\varphi x)$

para o problema de Neumann temos $X(x) = \cos(\varphi x)$

Pergunta: Seja $f \in L^2(0, \infty)$. Existem a e b tais que

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\varphi) \sin(\varphi x) d\varphi \quad \text{e} \quad f(x) = \int_0^{\infty} b(\varphi) \cos(\varphi x) d\varphi ?$$

Vamos começar estudando transformada de Fourier para funções pares e ímpares.

Proposição: Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Logo

$$1) \text{ Se } f \text{ é par, então } \mathcal{F}(f)(\varphi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(\varphi x) dx, \quad \mathcal{F}(f) \text{ é par, e } \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\varphi) \cos(\varphi x) d\varphi$$

$$2) \text{ Se } f \text{ é ímpar, então } \mathcal{F}(f)(\varphi) = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin(\varphi x) dx, \quad \mathcal{F}(f) \text{ é ímpar, e } \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\varphi) \sin(\varphi x) d\varphi$$

Obs. \mathcal{F}^{-1} é entendido como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int () e^{-\varepsilon^2 \varphi^2} d\varphi$ para f contínua.

Demonstração: 1) $\mathcal{F}(f)(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\varphi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) \cos(x\varphi)}{\text{par}} dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) \sin(x\varphi)}{\text{ímpar}} dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(x\varphi) dx$

Além disso, $\mathcal{F}(f)(-\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(-\xi x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(\xi x) dx = \mathcal{F}(f)(\xi)$.

(118)

Logo $\mathcal{F}(f)$ é par.

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\xi) \hat{f}(\xi) d\xi + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x\xi) \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\xi) \cos(x\xi) d\xi$$

2) Se f é ímpar, então

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(x\xi) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(x\xi) dx = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin(x\xi) dx$$

Além disso, $\mathcal{F}(f)(-\xi) = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin(x(-\xi)) dx = 2i \int_0^{\infty} f(x) \sin(x\xi) dx = 2i \mathcal{F}(f)(\xi)$.

Logo $\mathcal{F}(f)$ é ímpar

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cos(x\xi) d\xi + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \sin(x\xi) d\xi = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\xi) \sin(x\xi) d\xi$$



Isso nos motiva a seguinte definição:

Definição: Seja $f \in L^1(0, \infty)$. Definimos

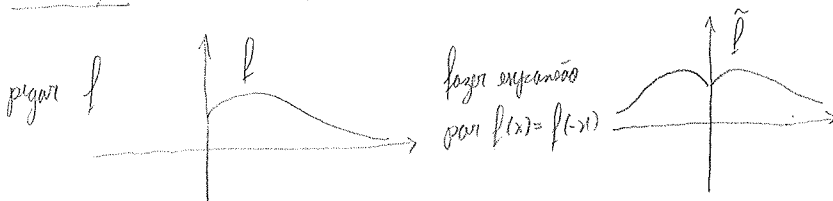
1) A transformada de Fourier cosseno $\mathcal{F}_c: L^1(0, \infty) \rightarrow L^{\infty}(0, \infty)$ como

$$\mathcal{F}_c(f)(\xi) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(\xi x) dx.$$

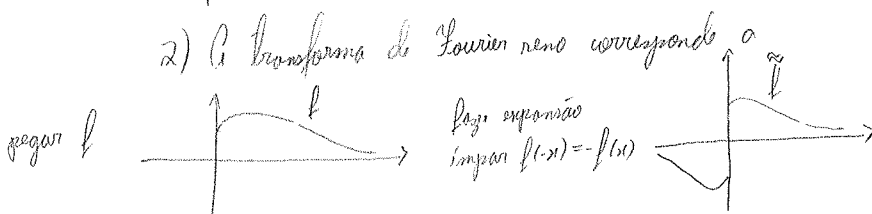
2) A transformada de Fourier seno $\mathcal{F}_s: L^1(0, \infty) \rightarrow L^{\infty}(0, \infty)$ como

$$\mathcal{F}_s(f) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(\xi x) dx.$$

Observação: 1) A transformada de Fourier cosseno corresponde a



$$\mathcal{F}_c(f)(\xi) = \frac{1}{2} \mathcal{F}(\tilde{f})|_{[0, \infty[}$$



$$\mathcal{F}_s(f)(\xi) = \frac{i}{2} \mathcal{F}(\tilde{f})|_{[0, \infty[}$$

Usando a observação concluímos que se $f \in L^1(0, \infty)$, então

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))|_{]0, \infty[} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\tilde{f}))|_{]0, \infty[} \quad \left(\begin{array}{l} \tilde{f} \text{ expansão par} \Rightarrow \mathcal{F}(\tilde{f}) \text{ é par} \\ \tilde{f} \text{ expansão ímpar} \Rightarrow \mathcal{F}(\tilde{f}) \text{ é ímpar} \end{array} \right)$$

Usando a proposição, isto implica que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\vartheta) \cos(\vartheta x) d\vartheta = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\vartheta) \sin(\vartheta x) d\vartheta$$

Como para $\vartheta > 0$ $\hat{f} = 2\mathcal{F}_c(f)$ e $\hat{f} = -2i\mathcal{F}_s(f)$, temos

Conclusão: Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Logo a transformada de Fourier seno e cosseno inversas são

$$\mathcal{F}_c^{-1}(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g(\vartheta) \cos(x\vartheta) d\vartheta \quad , \quad \mathcal{F}_s^{-1}(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g(\vartheta) \sin(x\vartheta) d\vartheta$$

(Como sempre, inversas no sentido em que se $f \in L^1(\mathbb{R})$ é contínua, então

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 \vartheta^2}{2}} \mathcal{F}_c(f)(\vartheta) \cos(\vartheta x) d\vartheta = f(x).$$

Do mesmo forma que para transformada de Fourier usuais, podemos "estender" a função \mathcal{F}_c e \mathcal{F}_s a funções $L^2(0, \infty)$. Neste caso $\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_s : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$ são bijeções e

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_c(f)(\vartheta) \cos(\vartheta x) d\vartheta \quad , \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_s(f)(\vartheta) \sin(\vartheta x) dx$$

Concluímos que $a(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \mathcal{F}_c(f)(\vartheta)$ e $b(\vartheta) = \frac{2}{\pi} \mathcal{F}_s(f)(\vartheta)$, em que a e b são as funções que procurávamos quando estávamos estudando os problemas de Sturm-Liouville em $]0, \infty[$.

Por fim, como prova parcial para \mathcal{F}_c e \mathcal{F}_s :

Proposição: Seja $f \in L^2(0, \infty)$. Logo $\|\mathcal{F}_c(f)\|_{L^2(0, \infty)}^2 = \|\mathcal{F}_s(f)\|_{L^2(0, \infty)}^2 = \frac{\pi}{2} \|f\|_{L^2(0, \infty)}^2$, ou seja,

$$\int_{-0}^{\infty} |\mathcal{F}_c(f)|^2 d\vartheta = \int_0^{\infty} |\mathcal{F}_s(f)(\vartheta)|^2 d\vartheta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Demonstração:

(120)

$$\int_0^{\infty} |\mathcal{F}_c(f)(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{2} \mathcal{F}(\tilde{f})(\xi) \right|^2 d\xi = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} |\mathcal{F}(\tilde{f})(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\tilde{f})(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{\infty} |\mathcal{F}_c(f)(\xi)|^2 d\xi$$

$\mathcal{F}_c(f) = \frac{1}{2} \mathcal{F}(\tilde{f}) \Big|_{[0, \infty]}$

$$\frac{1}{2} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)|^2 dx = \frac{1}{2} 2\pi 2 \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \Rightarrow \int_0^{\infty} |\mathcal{F}_c(f)(\xi)|^2 d\xi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

\tilde{f} é par

Com \mathcal{F}_s , a demonstração é igual. Basta substituir $\mathcal{F}_c \leftrightarrow \mathcal{F}_s$ e $f \leftrightarrow \tilde{f}$

Por fim, relacionamos \mathcal{F} , \mathcal{F}_c e \mathcal{F}_s .

Relação dos transformados: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função ($L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$). Definimos

$$f_0(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{e} \quad f_1(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Logo f_0 é par ($f_0(-x) = f_0(x)$) e f_1 é ímpar ($f_1(-x) = -f_1(x)$). Além disso, $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$.

Portanto,

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f_0) + \mathcal{F}(f_1) = 2 \int_0^{\infty} \cos(x\xi) f_0(x) dx - 2i \int_0^{\infty} \sin(x\xi) f_1(x) dx$$

Assim, $\boxed{\mathcal{F}(f) = 2 \mathcal{F}_c(f_0) - 2i \mathcal{F}_s(f_1)}$, para $\xi > 0$.

Aplicação: Queremos resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, x > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & x > 0 \end{cases}$$

condição de Neumann

Resolução: Como temos condição de Neumann o $\frac{\partial}{\partial x}(\cos(\xi x)) \Big|_{x=0} = -\xi \sin(\xi x) \Big|_{x=0} = 0$, vamos

usar transformado de Fourier cosseno.

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = k \mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

¿Qué es la función de Green? Función de Green

(121)

Seja L un operador diferencial. Suponho que queremos resolver o problema $Lu = f$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

$$Lu(x) = f(x), x \in \Omega.$$

A função de Green G é tal que a solução do problema acima pode ser escrita como

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy.$$

Se quisermos ainda que u satisfaça certas condições de contorno ou iniciais, então devemos escolher G de maneira conveniente.

Exemplo 1: Seja $L = \frac{d}{dx}$. Vamos resolver $Lu(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\frac{du}{dx}(x) = f(x).$$

Vamos supor que f seja contínua e de classe $L^1(\mathbb{R})$. Uma função de Green para a equação acima é a função $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(x,y) = H(x-y),$$

em que H é a função de Heaviside, ou seja, $H(t) := \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

De fato,

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y) f(y) dy \right) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} H(x-y) f(y) dy & \\ 0, & x < y \\ 1, & x > y \end{cases} = \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^x f(y) dy \right) = f(x).$$

Exemplo 2: Seja $L = \frac{d}{dx} + 1$. Queremos resolver $Lu(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $\frac{du}{dx}(x) + u(x) = f(x)$.

Uma possível função de Green é a função $G(x,y) = e^{-(x-y)} H(x-y)$.

De fato,

$$\left(1 + \frac{d}{dx} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y) f(y) dy \right) = \left(1 + \frac{d}{dx} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)} H(x-y) f(y) dy \right) = \left(\frac{d}{dx} + 1 \right) \int_{-\infty}^x e^{-(x-y)} f(y) dy = \left(1 + \frac{d}{dx} \right) \left(e^{-x} \int_{-\infty}^x e^y f(y) dy \right) =$$

$$e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{+y} f(y) dy - e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{+y} f(y) dy + e^{-x} e^x f(x) = f(x).$$

= 0

Vamos agora achar métodos gerais para calcular funções de Green.

Funções de Green para equações diferenciais ordinárias

• Problemas de valor inicial

Seja L o operador diferencial dado por $L = p_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x)$

Queremos resolver o problema

$$0) \begin{cases} L u(x) = f(x) \\ u^{(j)}(0) = c_j, \quad 0 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

em que $c_j \in \mathbb{C}$ não constantes.

Para tanto, podemos achar u_1, u_2 soluções de

$$I) \begin{cases} L u_1(x) = f(x) \\ u_1^{(j)}(0) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1 \end{cases} \quad , \quad II) \begin{cases} L u_2(x) = 0 \\ u_2^{(j)}(0) = c_j, \quad 0 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Por linearidade, concluímos que $u = u_1 + u_2$ é solução do nosso problema

Vamos supor que sabemos resolver o problema II). Vamos, então, mostrar como resolver I), por consequência, achar a solução de 0).

Assim, dado o problema $\begin{cases} L u(x) = f(x) \\ u^{(j)}(0) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1 \end{cases}$, nosso objetivo é achar uma função

$G((x,y) \mapsto G(x,y))$ tal que a solução do problema possa ser escrita como

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y) f(y) dy.$$

Vamos dar a resposta do problema na forma de um Teorema.

Teorema: Seja $L = \sum_{j=0}^k p_j(x) \frac{d^j}{dx^j}$ um operador diferencial, em que $p_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ são

funções contínuas. Para cada $y \in \mathbb{R}$, denotamos por $v_y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ a solução do problema de valor inicial: $L(v_y) = \sum_{j=0}^k p_j(x) \frac{d^j v_y}{dx^j}(x) = 0$, $v_y^{(j)}(y) = 0$, $0 \leq j < k-1$, $v_y^{(k-1)}(y) = \frac{1}{p_k(y)}$.

Logo a função $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $G(x, y) := v_y(x) (H(x-y) - H(-y))$ é função de Green do problema (II):

Dado $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ contínuo, $u(x) := \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy$ é solução de

$$L(u) = f, \quad u(0) = u'(0) = \dots = u^{(k-1)}(0) = 0.$$

Antes de provar o Teorema, damos alguns exemplos.

Exemplo 1: $L = \frac{d}{dx}$. Neste caso $p_1(x) = 1$. Logo v_y deve resolver

$$\frac{dv_y}{dx}(x) = 0, \quad v_y(y) = 1. \quad \text{Logo } v_y(x) = 1, \forall x.$$

Vemos que $G(x, y) = (H(x-y) - H(-y))$. Logo $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy$ é solução de $\begin{cases} Lu(x) = f(x) \\ u(0) = 0 \end{cases}$.

$$\text{De fato, } u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y) f(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} H(-y) f(y) dy = \int_{-\infty}^x f(y) dy - \int_{-\infty}^0 f(y) dy = \int_0^x f(y) dy.$$

$$\text{Logo } u'(x) = f(x) \text{ e } u(0) = \int_0^0 f(x) dx = 0.$$

Exemplo 2: $L = \frac{d}{dx} + 1$. Neste caso $p_1(x) = 1$. Logo v_y deve resolver

$$\frac{dv_y}{dx}(x) + v_y(x) = 0, \quad v_y(y) = 1 \Rightarrow v_y(x) = Ce^{-x}, \quad v_y(y) = 1 \Leftrightarrow Ce^{-y} = 1 \Leftrightarrow C = e^y.$$

Logo $v_y(x) = e^{y-x}$. Assim $G(x, y) = e^{(y-x)} (H(x-y) - H(-y))$.

Concluímos que $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy$ é solução de $Lu = f, u(0) = 0$.

Do fato, $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{y-x} (H(x-y) - H(-y)) f(y) dy = \int_{-\infty}^x e^{y-x} f(y) dy - \int_{-\infty}^0 e^{y-x} f(y) dy =$ (124)

$$\int_0^x e^{y-x} f(y) dy = e^{-x} \int_0^x e^y f(y) dy.$$

Logo $u(0) = e^0 \int_0^0 e^y f(y) dy = 0$, $u'(x) = -e^{-x} \int_0^x e^y f(y) dy + e^{-x} e^x f(x) =$
 $= -u(x) + f(x) \Rightarrow u'(x) + u(x) = f(x)$ ou

Exemplo 3: $L = \frac{d}{dx} + p(x)$. Note como $p_1(x) = 1$. Logo v_y deve resolver

$$\frac{dv_y}{dx}(x) + p(x)v_y(x) = 0, \quad v_y(y) = 1.$$

Vamos resolver a equação acima:

$$v_y' + p v_y = 0 \Leftrightarrow \frac{v_y'}{v_y} = -p \Leftrightarrow (\ln(v_y))' = -p \Leftrightarrow \ln(v_y(x)) - \ln(v_y(y)) = - \int_y^x p(t) dt$$

Logo $\ln(v_y(x)) = - \int_y^x p(t) dt \Rightarrow v_y(x) = \exp\left(- \int_y^x p(t) dt\right)$

Então, $G(x,y) = v_y(x) (H(x-y) - H(-y)) = e^{-\int_y^x p(t) dt} (H(x-y) - H(-y))$, ou seja,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y) f(y) dy \text{ é solução de } \frac{du}{dx}(x) + p(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = 0.$$

Do fato,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int_y^x p(t) dt\right) (H(x-y) - H(-y)) f(y) dy = \int_{-\infty}^x - \int_{-\infty}^0 = \int_0^x \exp\left(-\int_y^x p(t) dt\right) f(y) dy.$$

Logo $\frac{du}{dx}(x) = \exp\left(-\int_x^x p(t) dt\right) f(x) + \int_0^x -p(x) \exp\left(-\int_y^x p(t) dt\right) f(y) dy =$

$$= -p(x)u(x) + f(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx}(x) + p(x)u(x) = f(x)$$

Exemplo 4: $L = \frac{d^2}{dx^2} + k^2$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Neste caso $p_1(x) = 1$.

(25)

Logo v_y deve resolver

$$\frac{d^2 v_y}{dx^2}(x) + k^2 v_y(x) = 0, \quad v_y(y) = 0, \quad v_y'(y) = 1.$$

Vamos resolver a equação acima:

$$v_y'' + k^2 v_y = 0 \Rightarrow v_y(x) = A \cos(k(x-y)) + B \sin(k(x-y)).$$

Como $v_y(y) = 0 \Rightarrow A = 0$ $v_y'(y) = 1 \Rightarrow Bk = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{k}$. Logo $v_y(x) = \frac{1}{k} \sin(k(x-y))$.

Concluímos que $G(x,y) = \frac{1}{k} \sin(k(x-y)) (H(x-y) - H(-y))$, ou seja,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y) f(y) dy \text{ é solução de } \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + k^2 u(x) = f(x) \text{ com } u(0) = u'(0) = 0.$$

De fato,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k(x-y)) (H(x-y) - H(-y)) f(y) dy = \frac{1}{k} \int_0^x \sin(k(x-y)) f(y) dy.$$

Logo $\frac{du}{dx}(x) = \frac{1}{k} \sin(k(x-x)) f(x) + \int_0^x \cos(k(x-y)) f(y) dy = \int_0^x \cos(k(x-y)) f(y) dy.$

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = \cos(k(x-x)) f(x) - k \int_0^x \sin(k(x-y)) f(y) dy = f(x) - k^2 u(x)$$

Logo $\frac{d^2 u}{dx^2}(x) + k^2 u(x) = f(x)$, $u(0) = \frac{1}{k} \int_0^0 () dy = 0$, $u'(0) = \int_0^0 () dy = 0$.

Vamos agora demonstrar o Teorema:

Demonstração: Vamos que

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} v_y(x) (H(x-y) - H(-y)) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y) v_y(x) f(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} H(-y) v_y(x) f(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^x v_y(x) f(y) dy - \int_{-\infty}^0 v_y(x) f(y) dy = \int_0^x v_y(x) f(y) dy. \end{aligned}$$

Vamos derivar u :

Então sempre usando que

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(x,y) dy \right) = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dy.$$

Logo $\frac{d^1 u}{dx^1}(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x v_y(x) f(y) dy \right) = v_x(x) f(x) + \int_0^x v_y'(x) f(y) dy = \int_0^x v_y'(x) f(y) dy$, pois $v_y(y) = 0, \forall y$.

$\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x v_y'(x) f(y) dy \right) = v_x''(x) f(x) + \int_0^x v_y''(x) f(y) dy = \int_0^x v_y''(x) f(y) dy$, pois $v_y'(y) = 0, \forall y$.

\vdots
 $\frac{d^{k-1} u}{dx^{k-1}}(x) = v_x^{(k-2)}(x) f(x) + \int_0^x v_y^{(k-1)}(x) f(y) dy = \int_0^x v_y^{(k-1)}(x) f(y) dy$, pois $v_y^{(k-2)}(y) = 0, \forall y$.

$\frac{d^k u}{dx^k}(x) = v_x^{(k-1)}(x) f(x) + \int_0^x v_y^{(k)}(x) f(y) dy = \frac{f(x)}{p_k(x)} + \int_0^x v_y^{(k)}(x) f(y) dy$

Concluimos que

$$Lu(x) = \sum_{j=0}^k p_j(x) \frac{d^j u}{dx^j}(x) = \int_0^x \left(\sum_{j=0}^k p_j(x) v_y^{(j)}(x) f(y) \right) dy + p_k(x) \frac{f(x)}{p_k(x)} = f(x).$$

Além disso, $\frac{d^j u}{dx^j}(0) = \int_0^0 v_y^{(j)}(x) f(y) dy = 0, \forall 0 \leq j \leq k-1$.

A observação 1: Note que sempre temos $u(x) = \int_{-x}^x G(x,y) f(y) dy = \int_0^x v_y(x) f(y) dy$

A observação 2: Suponha que L tenha coeficientes constantes: $Lu(x) = \sum_{j=0}^k p_j \frac{d^j u}{dx^j}(x), p_j \in \mathbb{C}, \forall j$.

Seja $v_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ solução de $Lv_0(x) = 0, v_0^{(j)}(0) = 0, 0 \leq j \leq k-2, v_0^{(k-1)} = \frac{1}{p_k}$. Logo

$x \mapsto v_0(x-y)$ é solução de

$$L(v_0(x-y)) = \sum_{j=0}^k p_j \frac{d^j}{dx^j} (v_0(x-y)) = \sum_{j=0}^k p_j \frac{d^j v_0}{dx^j}(x-y) = (Lv_0)(x-y) = 0$$

$$\frac{d^j}{dx^j} (v_0(x-y)) \Big|_{x=y} = \frac{d^j v_0}{dx^j}(x-y) \Big|_{x=y} = \frac{d^j v_0}{dx^j}(0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j \leq k-2 \\ \frac{1}{p_k}, & j = k-1. \end{cases}$$

Logo $v_y(x) = v_0(x-y)$.

Isso implica que $G(x, y) = v_0(x-y) (H(x-y) - H(-y))$.

Anim, $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy = \int_0^x v_0(x-y) f(y) dy$.

Exemplos: $L = \frac{d}{dx}$, $v_0(x) = 1 \Rightarrow u(x) = \int_0^x f(y) dy$

$L = \frac{d}{dx} + 1$, $v_0(x) = e^x \Rightarrow u(x) = \int_0^x e^{x-y} f(y) dy$

$L = \frac{d^2}{dx^2} + k^2$, $v_0(x) = \frac{1}{k} \sin(kx) \Rightarrow u(x) = \int_0^x \frac{1}{k} \sin(k(x-y)) f(y) dy$.

Funções de Green para problemas de contorno

Vamos considerar um operador diferencial do tipo $L(u) = p_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + p_1(x) \frac{du}{dx} + p_0(x)u$.

Queremos estudar o seguinte problema de contorno

(PC) $\begin{cases} L(u) = f \\ \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \\ \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \end{cases}$, com $|\alpha| + |\alpha'| \neq 0$, $|\beta| + |\beta'| \neq 0$

Objetivo: achar $G: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$ é solução de (PC), $\forall f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ contínuo. A função G será chamada de função de Green do problema.

Dificuldade: A função de Green pode não existir.

Exemplo: $\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = 1, x \in [0, 1] \\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$. Logo $\frac{du}{dx}(x) = x + C \Rightarrow u(x) = \frac{x^2}{2} + Cx + D$.
 $u'(0) = (x + C)|_{x=0} = C = 0$.
Logo $u(x) = \frac{x^2}{2} + D$ e $u'(x) = x \Rightarrow u'(1) = 1 \neq 0$.

Logo a equação acima não tem solução. Portanto \nexists função de Green, pois se G existisse, $u(x) = \int_0^1 G(x, y) 1 dy$ seria solução.

O problema é que $\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$ tem soluções não nulas. De fato $u(x) = C \neq 0$. (128)

é uma solução para qualquer constante C .

Faremos, então, a seguinte hipótese, que assumiremos daqui em diante.

(H) Não existem soluções não nulas do problema $L(u) = 0, \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$

Vamos abaixo dar um recado para achar a função de Green, assumindo a hipótese acima.

Denotemos por v_a uma solução não nula do problema $\begin{cases} L(v_a) = 0 \\ \alpha v_a(a) + \alpha' v_a'(a) = 0 \end{cases}$

Denotemos por v_b uma solução não nula do problema $\begin{cases} L(v_b) = 0 \\ \beta v_b(b) + \beta' v_b'(b) = 0 \end{cases}$

Podemos provar a seguinte proposição.

Proposição: 1) Existe uma solução v_a não nula de $\begin{cases} L(v_a) = 0 \\ \alpha v_a(a) + \alpha' v_a'(a) = 0 \end{cases}$. Se \tilde{v}_a é outra solução do problema, então $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\tilde{v}_a = \lambda v_a$.

2) Existe uma solução v_b não nula de $\begin{cases} L(v_b) = 0 \\ \beta v_b(b) + \beta' v_b'(b) = 0 \end{cases}$. Se \tilde{v}_b é outra solução do problema, então $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\tilde{v}_b = \lambda v_b$.

3) Sejam v_a, v_b duas soluções do problema acima. Definimos o Wronskiano como a função $W(y) = \det \begin{pmatrix} v_a(y) & v_a'(y) \\ v_b(y) & v_b'(y) \end{pmatrix} = v_a(y)v_b'(y) - v_a'(y)v_b(y)$. Nas condições em que vale nossa hipótese (H), temos que $W(y) \neq 0, \forall y \in [a, b]$.

Demonstração:

1) Vamos que $\alpha v_0(a) + \alpha' v_0'(a) = 0$
 $\alpha \tilde{v}_0(a) + \alpha' \tilde{v}_0'(a) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_0(a) & v_0'(a) \\ \tilde{v}_0(a) & \tilde{v}_0'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix} = 0.$

(129)

Como $(\alpha, \alpha') \neq (0, 0)$, concluímos que $\det \begin{pmatrix} v_0(a) & v_0'(a) \\ \tilde{v}_0(a) & \tilde{v}_0'(a) \end{pmatrix} = 0$. Logo as linhas são linearmente dependentes, ou seja, $(\tilde{v}_0(a), \tilde{v}_0'(a)) = \lambda (v_0(a), v_0'(a))$

Vamos que $L(\lambda v_0) = 0$. Assim como λv_0 , \tilde{v}_0 resolve a equação com as mesmas condições iniciais, concluímos, pelo teorema de unicidade, que $\tilde{v}_0 = \lambda v_0$.

Por fim, sabemos que $L(v) = 0$ tem única solução. Seja v_0 esta solução. Logo $\alpha v_0(a) + \alpha' v_0'(a) = -\alpha \alpha' + \alpha' \alpha = 0$

2) Mesmo argumento que o feito acima.

3) Suponha que existe $y_0 \in [a, b]$ tal que $W(y_0) = 0$. Logo $\det \begin{pmatrix} v_0(y_0) & v_0'(y_0) \\ v_1(y_0) & v_1'(y_0) \end{pmatrix} = 0$. Assim as linhas são linearmente dependentes, ou seja, $(v_1(y_0), v_1'(y_0)) = \lambda (v_0(y_0), v_0'(y_0))$. Assim vemos

que $\left. \begin{array}{l} L(\lambda v_0) = \lambda L(v_0) = 0 \\ (\lambda v_0)(y_0) = v_1(y_0) \\ (\lambda v_0)'(y_0) = v_1'(y_0) \end{array} \right\}$ Logo λv_0 é solução da equação " $L(v) = 0$ ", satisfaz, no ponto y_0 , as mesmas condições iniciais que a função v_1 . Pelo Teorema de existência e unicidade, concluímos que $v_1(y) = \lambda v_0(y)$, $\forall y$.

Em particular, $\alpha v_0(a) + \alpha' v_0'(a) = \lambda (\alpha v_0(a) + \alpha' v_0'(a)) = 0$, ou seja,

$L(v_0) = 0$, $\alpha v_0(a) + \alpha' v_0'(a) = \beta v_0(b) + \beta' v_0'(b) = 0$. Pelo hipótese (H), v_0 deve

Função de Green para equações do calor, calor e Poisson

Equação do Calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = F(t,x)$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0$$

$$u(0,x) = 0$$

Buscamos achar $G:]0, \infty[\times]0, l] \times]0, \infty[\times]0, l]$ tal que

$$u(x) = \int_0^\infty \int_0^l G(t,x,s,y) F(s,y) ds dy$$
 seja a solução do problema.

Vemos que, escrevendo $F(t,x) = \sum_{n=1}^\infty \beta_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ com $\beta_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(t,y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dy$, podemos procurar uma solução u da forma $u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$. Logo

$$\sum_{n=1}^\infty \left[b_n'(t) + k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 b_n(t) - \beta_n(t) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_n'(t) + k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 b_n(t) = \beta_n(t) \\ b_n(0) = 0 \end{cases}$$

Então, $\left(e^{+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k t} b_n(t) \right)' = e^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k t} \beta_n(t) \Rightarrow b_n(t) = \int_0^t \beta_n(s) e^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k (s-t)} ds$

$b_n(0) = 0$

Concluímos que $u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^t \beta_n(s) e^{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k (s-t)} ds \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) =$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_0^t \int_0^l \frac{2}{l} F(s,y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k (t-s)} dy ds \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$= \int_0^t \int_0^l \frac{2}{l} \sum_{n=1}^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{y\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k (t-s)} F(s,y) ds dy$$

Como que $\int_0^t f(s) ds = \int_0^\infty H(t-s) f(s) ds$, pois $H(t-s) = \begin{cases} 1, & s < t \\ 0, & s \geq t \end{cases}$ Logo

$$u(t,x) = \int_0^t \int_0^l \underbrace{\left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^\infty H(t-s) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} k (t-s)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \right)}_{:= G(t,x,s,y)} F(s,y) ds dy$$

$:= G(t,x,s,y)$ é a função de Green.

Concluímos que a função de Green é $G(t, x, s, y) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} H(t-s) e^{-\frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} (t-s)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$

Equações de onda

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = F(t, x) \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 \\ u(0, x) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \end{cases}$$

Queremos achar $G:]0, \infty[\times]0, l[\times]0, \infty[\times]0, l[\rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$u(x) = \int_0^t \int_0^l G(t, x, s, y) F(s, y) ds dy \text{ seja a solução.}$$

Novamente escrevemos $F(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$, $\beta_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(t, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dy$ e $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

$$\text{Logo } \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n''(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 b_n(t) - \beta_n(t) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 b_n(t) = \beta_n(t) \\ b_n(0) = b_n'(0) = 0 \end{cases}$$

Assim, obtemos $b_n(t) = \frac{l}{n\pi c} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right) \beta_n(s) ds$

$$b_n'(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right) \beta_n(s) ds$$

$$b_n''(t) = -\left(\frac{n\pi c}{l}\right) \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right) \beta_n(s) ds + \beta_n(t)$$

$$\begin{aligned} b_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 b_n(t) &= -\frac{n\pi c}{l} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right) \beta_n(s) ds + \frac{n\pi c}{l} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right) \beta_n(s) ds + \beta_n(t) \\ b_n(0) = b_n'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Concluímos que $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi c} \int_0^t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right) \frac{2}{l} \int_0^l F(s, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dy ds \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) =$

$$\int_0^t \int_0^l \frac{2}{n\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) F(s, y) ds dy \stackrel{(*)}{=} \int_0^t f(s) ds = \int_0^t H(t-s) f(s) ds$$

$$\int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{n\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} H(t-s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \right) F(s, y) ds dy$$

$:= G(t, x, s, y)$ é a função de Green.

Logo a função de Green é $G(t, x, s, y) = \frac{2}{n\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} H(t-s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l}(t-s)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$.

Observação 1: A função de Green para a equação do calor é uma função em $C^\infty([0, l] \times [0, l])$, pois a exponencial cai rapidamente. Logo a série e suas derivadas convergem absolutamente e uniformemente.

• A função de Green para a equação de onda é dada por uma série que não faz

então após fazer integração? a convergência é mais delicada (o pode não ocorrer...)

(138)

Observação 2. Como resolver $\begin{cases} b_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 b_n(t) = \beta_n(t) \\ b_n(0) = b_n'(0) = 0 \end{cases}$? Podemos usar nosso conhecimento sobre

funções de Green.

Seja v_0 a solução de $\begin{cases} v_0''(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 v_0(t) = 0 \\ v_0(0) = 0, v_0'(0) = 1 \end{cases}$. Logo $v_0(t) = a \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + b \sin\left(\frac{n\pi c}{l} t\right)$
 $v_0(0) = a = 0$, $v_0'(0) = \frac{n\pi c}{l} b = 1$.

Assim, $v_0(t) = \frac{l}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) \Rightarrow v_y(t) = \frac{l}{n\pi c} \sin\left(\frac{n\pi c}{l} (t-y)\right)$

Concluímos que $G(x,y) = v_y(x) (H(x-y) - H(-y))$. Logo $b_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s) \beta_n(s) ds = \int_0^t v_s(t) \beta_n(s) ds$.

Logo $b_n(t) = \frac{l}{n\pi c} \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi c}{l} (t-s)\right) \beta_n(s) ds$.

Como resolver $\begin{cases} b_n'(t) + k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 b_n(t) = \beta_n(t) \\ b_n(0) = 0 \end{cases}$? Novamente vamos usar funções de Green.

Seja v_0 a solução $\begin{cases} v_0'(t) + k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 v_0(t) = 0 \\ v_0(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow v_0(t) = e^{-k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$

Assim, $v_y(t) = e^{-k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (t-y)}$. Portanto, $G(x,y) = e^{-k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (x-y)} (H(x-y) - H(-y))$.

Logo $b_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s) \beta_n(s) ds = \int_0^t e^{-k \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 (t-s)} \beta_n(s) ds$.

Equação de Poisson

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = F(x,y) \\ u(0,y) = u(l,y) = 0 \\ u(x,0) = u(x,l) = 0 \end{cases}$$

Queremos achar $G: [0,l] \times [0,l] \times [0,l] \times [0,l] \rightarrow \mathbb{C}$
 tal que $u(x) = \int_0^l \int_0^l G(x,y,t,s) F(t,s) dt ds$.

Vamos escrever $F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$, $\beta_n(x) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x,s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) ds$

Vamos procurar uma solução da forma $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$. Logo b_n deve obedecer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 b_n(x) - \beta_n(x) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right) = 0.$$

Logo $\begin{cases} b_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 b_n(x) = \beta_n(x) & (PC) \\ b_n(0) = b_n(l) = 0 \end{cases}$

Vamos resolver a equação acima achando uma função de Green para (PC). Vamos achar v_0 e v_1 .

$v_0''(x) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 v_0(x) = 0$
 $v_0(0) = 0$
 $\Rightarrow v_0(x) = Ae^{\frac{n\pi}{l}x} + Be^{-\frac{n\pi}{l}x}$
 $v_0(0) = A+B$
 Escolho $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Logo
 $v_0(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{n\pi}{l}x} - e^{-\frac{n\pi}{l}x})$
 $v_0(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$

$v_1''(x) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 v_1(x) = 0$
 $v_1(l) = 0$
 $\Rightarrow v_1(x) = Ae^{\frac{n\pi}{l}x} + Be^{-\frac{n\pi}{l}x}$
 $v_1(l) = Ae^{n\pi} + Be^{-n\pi} = 0$
 Escolho $A = \frac{1}{2}e^{-n\pi}$ e $B = -\frac{1}{2}e^{n\pi}$. Logo
 $v_1(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{n\pi}{l}(x-l)} - e^{-\frac{n\pi}{l}(x-l)})$
 $v_1(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}(x-l)\right)$

Vamos achar $W(y) = \det \begin{pmatrix} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}y\right) & \frac{n\pi}{l} \cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right) \\ \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}(y-l)\right) & \frac{n\pi}{l} \cosh\left(\frac{n\pi}{l}(y-l)\right) \end{pmatrix} = \frac{n\pi}{l} \left(\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{l}(y-l)\right) - \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}(y-l)\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right) \right) =$

$\frac{n\pi}{l} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}y - \frac{n\pi}{l}(y-l)\right) = \frac{n\pi}{l} \operatorname{senh}(n\pi)$

Assim, $G_n(x,y) = \begin{cases} \frac{v_0(x)v_1(y)}{\rho_2(y)W(y)}, & x < y \\ \frac{v_0(y)v_1(x)}{\rho_2(y)W(y)}, & x > y \end{cases} = \begin{cases} \frac{l}{n\pi} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}(y-l)\right)}{\operatorname{senh}(n\pi)}, & x < y \\ \frac{l}{n\pi} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}y\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l}(x-l)\right)}{\operatorname{senh}(n\pi)}, & x > y \end{cases}$

Portanto, $b_n(x) = \int_0^l G_n(x,s) \beta_n(s) ds = \int_0^l \int_0^l G_n(x,s) \frac{2}{l} F(s,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{l}\right) ds dt$.

Assim, $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^l \int_0^l \frac{2}{l} G_n(x,s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{l}\right) F(s,t) ds dt \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$.

Concluimos que a função de Green é

$$G(x, y, s, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x, s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right),$$

em que $G_n(x, s) = \frac{l}{n\pi} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l} \min\{x, s\}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l} (\max\{x, s\} - l)\right)}{\operatorname{senh}(n\pi)}$

Como, assim, que $G(x, y, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l} \min\{x, s\}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{l} (\max\{x, s\} - l)\right)}{\operatorname{senh}(n\pi)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$

Outra forma:

Escrevendo $F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{l}\right)$, $b_{nm} = \left(\frac{2}{l}\right)^2 \int_0^l \int_0^l F(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{l}\right) dx dy$

Logo se $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{l}\right)$. Logo

$$\Delta u = F \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) u_{nm} - b_{nm} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{l}\right) = 0.$$

Assim, $u_{nm} = -\frac{b_{nm}}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}$.

Logo $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-l^2}{\pi^2(m^2+n^2)} \int_0^l \int_0^l F(s, t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi t}{l}\right) ds dt \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{l}\right)$

$$= \int_0^l \int_0^l \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l^2}{\pi^2(m^2+n^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi t}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{l}\right) \right) F(s, t) ds dt$$

Concluimos que $G(x, y, s, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l^2}{\pi^2(m^2+n^2)} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi t}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{l}\right)$