PROVA 1 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA - MAP 2313

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Consideremos a equação do calor com condições de Neumann: $\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \ \ t>0 \, \text{e} \, x \in]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0, \ \ t>0 \\ u(0,x) = cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \ \ x \in]0,l[\end{array} \right.$.

(2,0 Ponto) a) Ache as soluções da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$ da equação $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ com a condição de contorno $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0$.

Resolução:

Vamos procurar soluções do tipo $u(t,x) = T(t)X(x)$. Logo

$$T'(t)X(x) = kT(t)X''(x) \implies \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Logo

$$\begin{array}{c} T'(t) = -k\lambda^2 T(t) \\ X''(x) = -\lambda^2 X(x) \end{array} .$$

Logo $T(t) = a\exp(-k\lambda^2 t)$ e $X(x) = a\text{cos}(\lambda x) + b\text{sen}(\lambda x)$. Portanto,

$$u(t,x) = \exp(-k\lambda^2 t)\left(a\text{cos}(\lambda x) + b\text{sen}(\lambda x)\right).$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0$, concluímos que

$$\lambda\left(-a\text{sen}(\lambda 0) + b\text{cos}(\lambda 0)\right) = \lambda\left(-a\text{sen}(\lambda l) + b\text{cos}(\lambda l)\right) = 0.$$

Logo

$$b = 0 \ \text{ e } \ \text{sen}(\lambda l) = 0.$$

Vemos, assim, que $\lambda = \frac{n\pi}{l}$, $n \in \{0,1,2,3,...\}$.

As soluções são, portanto,

$$u_n(t,x) = \exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

(1 ponto) b) Utilizando a condição inicial $u(0,x) = cos(x) + cos(3x)$, para todo $x \in]0,l[$, ache a solução completa do problema.

Resolução:

Vamos procurar uma solução da forma

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\left(-k\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Como

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{cos}\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

concluímos que $b_1 = b_3 = 1$ e $b_n = 0$ para $n \notin \{1,3\}$. Portanto,

$$u(t,x) = \exp\left(-k\frac{\pi^2}{l^2}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \exp\left(-k\frac{9\pi^2}{l^2}t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right).$$

Exercício 2

(1,5 ponto) Ache todas as soluções $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do problema: $\left\{ \begin{array}{c} \frac{d^2u_0}{dx^2}(x) = 0 \\ \frac{du_0}{dx}(0) = \frac{du_0}{dx}(l) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$.

Use uma solução particular acima (a que você achar mais fácil) e resolva o problema:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \;\; t>0 \,\mathrm{e}\, x\in]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = \frac{1}{2}, \;\; t>0 \\ u(0,x) = cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right) + \frac{1}{2}x, \;\; x\in]0,l[\end{array}\right. .$$

(Dica: Faça uma escolha conveniente e reduza o problema acima ao problema do exercício 1)
Resolução:
$u_0(x) = ax+b$. Logo $\frac{du_0}{dx}(x) = a$. Assim, $a=\frac{1}{2}$. Portanto, uma solução é $u_0(x) = \frac{1}{2}x + b$.
Seja $v(t,x) = u(t,x) - u_0(x)$, em que u é uma solução do problema e $u_0(x) = \frac{1}{2}x$. Logo v satisfaz

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x), \;\; t>0 \,\mathrm{e}\, x\in]0,l[\\ \frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,l) = 0, \;\; t>0 \\ v(0,x) = cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + cos\left(\frac{3\pi x}{l}\right), \;\; x\in]0,l[\end{array}\right. .$$

Assim,

$$v(t,x) = \exp\left(-k\frac{\pi^2}{l^2}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \exp\left(-k\frac{9\pi^2}{l^2}t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right).$$

Portanto,

$$u(t,x) = \exp\left(-k\frac{\pi^2}{l^2}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \exp\left(-k\frac{9\pi^2}{l^2}t\right)\cos\left(\frac{3\pi}{l}x\right) + \frac{1}{2}x.$$

EXERCÍCIO 3

Consideremos o seguinte problema de calor não homogêneo

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right), \;\; t>0 \,\mathrm{e}\, x\in]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \;\; t>0 \\ u(0,x) = f(x), \;\; x\in]0,l[0 \end{array}\right. ,$$

em que k é um função em $C^1([0,l])$ e $k(x)>0$ para todo $x\in[0,l]$

(1,0 ponto) a) Usando a técnica de separação de variáveis, procure uma solução da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$ da equação $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)$ com a condição de contorno $u(t,0) = u(t,l) = 0$ e mostre que X é solução do problema de Sturm-Liouville abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}(x)\right) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{array}\right. .$$

para algum $\lambda\in\mathbb{R}$.
Resolução:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)$$

implica que

$$T'(t)X(x) = T(t)\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}(x)\right) \implies \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}(x)\right)}{X(x)} = -\lambda.$$

Logo

$$T'(t) = -\lambda T(t) \;\text{ e }\; \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}(x)\right) = -\lambda X(x).$$

(1,5 ponto) b) Mostre se X é uma solução diferente de zero da equação acima, então o autovalor λ correspondente satisfaz $\lambda \geq 0$. (Dica: Ache uma expressão para $\lambda\int|X(x)|^2\,dx = \lambda\int X(x)\overline{X(x)}dx$, substituindo $\lambda X(x)$ por $-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}(x)\right)$ e integrando por partes. Conclua da expressão obtida o resultado)
Reolução:

$$\lambda\int|X(x)|^2\,dx = \lambda\int X(x)\overline{X(x)}dx = -\int\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dX}{dx}(x)\right)\overline{X(x)}dx =$$

$$\int\left(k(x)\frac{dX}{dx}(x)\right)\frac{\overline{dX(x)}}{dx}dx = \int k(x)\left|\frac{dX}{dx}(x)\right|^2dx \geq 0.$$

EXERCÍCIO 4

Suponha que queiramos achar uma aproximação dos números π e π^2. Uma boa forma de fazer isto é achando uma série que convirja a estes números. Nesse exercício, prove que

(1,0 ponto) a) $\pi = 4\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\right)$

(1,5 ponto) b) $\pi^2 = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 6\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + ...\right)$.

Para tanto, calcule a série de Fourier da função $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ dada por $f(\theta) = \theta$. Substitua um valor conveniente para obter a) e use Parseval para obter b).

Resolução:

a)

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, cos(n\theta)\, d\theta = 0$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta sen(n\theta)\, d\theta e b_n := -\frac{1}{\pi}\theta\frac{\cos(n\theta)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(n\theta)}{n} d\theta =$$

$$\left(-\frac{1}{\pi}\pi\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) - \left(-\frac{1}{\pi}(-\pi)\frac{\cos(n(-\pi))}{n}\right) = \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) - \left(\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Logo

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen}(n\theta).$$

Assim

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{2n-1+1}}{2n-1}\text{sen}\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{2n+1}}{2n}\text{sen}\left(2n\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}(-1)^{n+1}.$$

Assim,

$$\pi = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...\right)$$

b) Usando Parseval, temos

$$2\frac{\pi^3}{3} = \pi\sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{1}{n^2} \implies \pi^2 = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Formulário

Proposição 1. *Seja* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *uma função de classe* C^1*. Logo para todo ponto* $\theta \in \,]-\pi, \pi[$*, temos*

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n sen(n\theta),$$

em que $c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$, $a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) cos(n\theta)\, d\theta$ *e* $b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, sen(n\theta) d\theta$.

Proposição 2. *Seja* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *uma função contínua. Logo a igualdade abaixo (chamada de igualdade de Parseval) é válida:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{\pi}{2}|a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right),$$

em que $c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$, $a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) cos(n\theta)\, d\theta$ *e* $b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, sen(n\theta) d\theta$.

Observação: A igualdade acima é válida para toda função em $L^2(-\pi, \pi)$.

Proposição 3. *Seja* $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1*. Logo para todo ponto* $\theta \in \,]0, l[$*, temos*

1) Expansão em Série de Fourier cosseno

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{\pi n}{l}\theta\right),$$

em que

$$a_n := \frac{2}{l}\int_0^l f(\theta) cos\left(\frac{\pi n}{l}\theta\right) d\theta.$$

2) Expansão em Série de Fourier seno

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{\pi n}{l}\theta\right),$$

em que

$$b_n := \frac{2}{l}\int_0^l f(\theta)\, sen\left(\frac{\pi n}{l}\theta\right) d\theta.$$