PROVA 2 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA - MAP 2313

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

EXERCÍCIO 1

Consideremos a seguinte equação de onda no semiplano: $\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ t>0 \text{ e } x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x),\ x\in\mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$.

(1 ponto) a) Calcule a transformada de Fourier inversa de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ou seja, $\mathcal{F}^{-1}(g)$, em que $g(\xi) = cos(b\xi)\, e^{-a\xi^2}$, a e b são reais positivos. (Dica: Vimos em sala de aula que $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{a}{2}x^2}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}$. Pode usar este resultado. Lembre-se também que $cos(b\xi) = \frac{e^{ib\xi}+e^{-ib\xi}}{2}$)

Resolução: Vemos que $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{a}{2}x^2}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}$. Logo $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\frac{\xi^2}{2a}}\right) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-\frac{a}{2}x^2}$. Assim, $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a\xi^2}\right) = \sqrt{\frac{1}{4a\pi}} e^{-\frac{1}{4a}x^2}$.

Portanto

$$\mathcal{F}^{-1}\left(sen\,(b\xi)\, e^{-a\xi^2}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{ib\xi}+e^{-ib\xi}}{2} e^{-a\xi^2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(e^{ib\xi}e^{-a\xi^2}\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-ib\xi}e^{-a\xi^2}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a\xi^2}\right)(x+b) + \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a\xi^2}\right)(x-b)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4a\pi}}\left[e^{-\frac{1}{4a}(x+b)^2} + e^{-\frac{1}{4a}(x-b)^2}\right]$$

(1 ponto) b) Aplicando a transformada de Fourier na coordenada x, podemos achar a solução da equação acima na forma $\hat{u}(t,x) = g(t,\xi)\,\hat{f}(\xi)$, em que $\hat{u}$ indica a transformada de Fourier de u na variável x. Determine a função g.

Resolução: Aplicando a transformada de Fouier na variável x, obtemos

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t,\xi) = -c^2\xi^2\hat{u}(t,\xi),\ t>0 \text{ e } \xi\in\mathbb{R} \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi),\ \xi\in\mathbb{R} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0,\xi) = 0,\ \xi\in\mathbb{R} \end{array}\right. .$$

Logo $\hat{u}(t,\xi) = A(\xi)cos(c\xi t) + B(\xi)sen(b\xi t)$. Usando as condições iniciais, concluímos que $\hat{u}(t,\xi) = cos(c\xi t)\hat{f}(\xi)$. Portanto, $g(t,\xi) = cos(c\xi t)$

(1 ponto) c) Ache a solução explícita $u(t,x)$ do problema acima para $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Resolução: Vemos que $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Logo $\hat{u}(t,\xi) = cos(c\xi t)\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}cos(c\xi t)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Portanto

$$u(t,x) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}\left(cos(c\xi t)e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}(x+ct)^2} + e^{-\frac{1}{2}(x-ct)^2}\right).$$

EXERCÍCIO 2

(1,0 ponto) a) Calcule a transformada de Fourier da função $\chi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida abaixo:

$$\chi(x) = \left\{\begin{array}{l} 1,\ |x|\le 1 \\ 0,\ |x|>1 \end{array}\right. .$$

Resolução:

$$\mathcal{F}(\chi)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\chi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}dx = \frac{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}{-i\xi} = 2\frac{sen\,(\xi)}{\xi}.$$

(1 ponto) b) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{sen\,(x)}{x}\right)^2=\pi.$$

Resolução:
Vimos que

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f\,(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}f\,(\xi)|^2\,d\xi.$$

Logo

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|\chi\,(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left|2\frac{sen\,(\xi)}{\xi}\right|^2\,d\xi.$$

Assim, como $\int_{-\infty}^{\infty}|\chi\,(x)|^2\,dx=2$, concluímos que

$$4\pi=4\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{sen\,(\xi)}{\xi}\right|^2\,d\xi\implies\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{sen\,(\xi)}{\xi}\right|^2\,d\xi=\pi.$$

Exercício 3

(2,5 pontos) Ache a função de Green do problema de valor inicial abaixo:

$$\begin{cases}\frac{d^2u}{dx^2}\,(x)-4u\,(x)=f\,(x)\\ u\,(0)=u'\,(0)=0\end{cases}$$

Resolução:
Vamos resolver

$$\begin{cases}\frac{d^2v_0}{dx^2}\,(x)-4v_0\,(x)=0\\ v_0\,(0)=0\\ v_0'\,(0)=1\end{cases}.$$

Seja $v_0\,(x)=e^{\lambda x}$. Logo $\left(\lambda^2-4\right)e^{\lambda x}=0$. Logo $\lambda=\pm2$. Assim $v_0(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}$. Portanto

$$G\,(x,y)=\frac{1}{4}\left(e^{2(x-y)}-e^{-2(x-y)}\right)(H\,(x-y)-H\,(-y))\,.$$

Exercício 4

(1 ponto) Ache a solução geral da equação abaixo

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}\,(x)+2x\frac{du}{dx}\,(x)-2u\,(x)=0.$$

Dica: Procure soluções da forma $u\,(x)=x^\lambda$.
Resolução:

$$(\lambda\,(\lambda-1)+2\lambda-2)\,x^\lambda=0\iff\left(\lambda^2+\lambda-2\right)x^\lambda=0.$$

Logo $\lambda=1$ ou $\lambda=-2$, ou seja, $u\,(x)=Ax+Bx^{-2}$.

(1,5 pontos) Ache a função de Green do problema de contorno abaixo:

$$\begin{cases}x^2\frac{d^2u}{dx^2}\,(x)+2x\frac{du}{dx}\,(x)-2u\,(x)=f\,(x)\\ u\,(1)=u\,(2)=0\end{cases}.$$

Resolução:

$$\begin{cases}x^2\frac{d^2u}{dx^2}\,(x)+2x\frac{du}{dx}\,(x)-2u\,(x)=0\\ u\,(1)=0\end{cases}$$

tem solução particular $u\,(x)=x-\frac{1}{x^2}$

$$\begin{cases}x^2\frac{d^2u}{dx^2}\,(x)+2x\frac{du}{dx}\,(x)-2u\,(x)=0\\ u\,(2)=0\end{cases}$$

tem solução particular $u\,(x)=x-8\frac{1}{x^2}$

$W\,(x)=\left(x-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+16\frac{1}{x^3}\right)-\left(1+2\frac{1}{x^3}\right)\left(x-8\frac{1}{x^2}\right)=x+16\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}-16\frac{1}{x^5}-x+8\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}+16\frac{1}{x^5}=16\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}+8\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{21}{x^2}$. Logo $p_2\,(x)\,W\,(x)=21$.

Assim

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{21}\left(x - \frac{1}{x^2}\right)\left(y - 8\frac{1}{y^2}\right), x < y \\ \frac{1}{21}\left(y - \frac{1}{y^2}\right)\left(x - 8\frac{1}{x^2}\right), x > y \end{cases} .$$

Formulário

Abaixo todas as funções são bem comportadas, no sentido em que as operações abaixo estão bem definidas. (Por exemplo, as funções podem pertencer a $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$...)

Definição 1. A Transformada de Fourier $\mathcal{F}$ e a Transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$ são definidas como

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx \\ \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi \end{array}.$$

Também denotamos a Transformada de Fourier por $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

Definição 2. A convolução de duas funções é definida como

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

Proposição 3. *As seguintes propriedades da transformada de Fourier e da convolução são válidas:*

a) $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(f)\right) = f$
b) $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$.
c) $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$.
d) $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right)(\xi) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$.
e) $f*g = g*f$.
f) $\mathcal{F}(f(x-b))(\xi) = e^{-ib\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$, $b\in\mathbb{R}$.
g) $\mathcal{F}\left(e^{-icx}f(x)\right)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi+c)$, $c\in\mathbb{R}$.

Proposição 4. *Sejam f e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ funções de quadrado integrável (pertencem a $L^2(\mathbb{R})$). Logo vale a igualdade:*

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}f(\xi)\,\overline{\mathcal{F}g(\xi)}d\xi. \text{ Em particular, temos } 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi.$$

Proposição 5. *(Funções de Green para Problemas de Valor Inicial)*

Considere o problema

$$\left\{\begin{array}{c} p_k(x)\frac{d^k u}{dx^k}(x) + p_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}}(x) + \ldots + p_0(x)\,u(x) = f(x) \\ u(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(k-1)}(0) = 0 \end{array}\right.,$$

em que $p_k(x)\neq 0$ para todo x e as funções p_j são contínuas.

Logo a função de Green do problema é dada por $G(x,y) = v_y(x)\,(H(x-y) - H(-y))$, em que v_y é solução de

$$\left\{\begin{array}{c} p_k(x)\frac{d^k v_y}{dx^k}(x) + p_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}v_y}{dx^{k-1}}(x) + \ldots + p_0(x)\,v_y(x) = 0 \\ v_y(y) = 0 \\ \vdots \\ v_y^{(k-2)}(y) = 0 \\ v_y^{(k-1)}(y) = \frac{1}{p_k(y)} \end{array}\right..$$

Proposição 6. *(Funções de Green para Problemas de Valor de Contorno)*

Considere o problema

$$\left\{\begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{du}{dx}(x) + p_0(x)\,u(x) = f(x) \\ \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \\ \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \end{array}\right.,$$

em que $(\alpha,\alpha')\neq(0,0)$, $(\beta,\beta')\neq(0,0)$ e $p_2(y)\neq 0$ para todo y e as funções p_j são contínuas

Suponha que o problema satisfaça a condição (H) definida abaixo:

Condição (H): O problema $\left\{\begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{du}{dx}(x) + p_0(x)\,u(x) = 0 \\ \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \\ \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \end{array}\right.$ *não tem soluções não nulas.*

Logo a função de Green do problema é dada por $G(x,y) = \left\{\begin{array}{l} \frac{v_1(x)v_2(y)}{p_2(y)W(y)},\ x<y \\ \frac{v_1(y)v_2(x)}{p_2(y)W(y)},\ x>y \end{array}\right.$ *, em que* $W(y) = v_1(y)\,v_2'(y) - v_1'(y)\,v_2(y)$, *$v_1$ e v_2 são soluções não nulas das equações abaixo:*

$$\left\{\begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2v_1}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{dv_1}{dx}(x) + p_0(x)\,v_1(x) = 0 \\ \alpha v_1(a) + \alpha' v_1'(a) = 0 \end{array}\right. \quad e \quad \left\{\begin{array}{c} p_2(x)\frac{d^2v_2}{dx^2}(x) + p_1(x)\frac{dv_2}{dx}(x) + p_0(x)\,v_2(x) = 0 \\ \beta v_2(b) + \beta' v_2'(b) = 0 \end{array}\right..$$