GABARITO DA PROVA 1 (24/09/2004)
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Cada questão vale 2.5 pontos; nas questões com k itens cada um vale $2.5/k$ pontos.

A duração da prova é de 2 horas.

Questão 1. Mostre que todo *elipsóide* $\mathcal{E}(a,b,c)$ em $\mathbb{R}^3$ é homeomorfo à esfera unitária $\mathcal{S}$. Aqui $\mathcal{E}(a,b,c) = \{(x,y,z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, com $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, e $\mathcal{S} = \mathcal{E}(1,1,1)$.

Demonstração. Considere $h : \mathcal{E}(1,1,1) \to \mathcal{E}(a,b,c)$ dada por $h(x,y,z) = (ax, by, cz)$. É claro que h é injetora e sobrejetora e que é contínua, pois é linear, bem como sua inversa também (é trivial). $\square$

Questão 2. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$. Suponha que $\partial f/\partial x$ é definida e limitada em valor absoluto $\mathbb{R}^2$ por uma constante $\lambda < 1$. Isto é: $|\partial f/\partial x(x,y)| \leq \lambda < 1$. Suponha também que para todo $x \in \mathbb{R}$, a função $y \to f(x,y)$ é continua. Prove que

a) para todo $y \in \mathbb{R}$ a equação $f(x,y) = x$ tem uma única solução da forma $x = \varphi(y)$; e

Demonstração. Dado y, considere $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_y(x) = f(x,y)$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que $|f_y(x) - f_y(z)| \leq \sup_{c\in\mathbb{R}} |f'_y(c)||x - z| < \lambda|x - z|$, pois $f'_y = \frac{\partial f}{\partial x}$. Assim, f_y é uma contração, e o item (a) segue pelo teorema do ponto fixo (exercício 10 da lista 3). $\square$

b) $\varphi(y)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Basta estimarmos $|\varphi(x) - \varphi(y)|$ e mostrarmos que quando $x \to y$, então $|\varphi(x) - \varphi(y)|$ vai a 0. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi(y)| &= |f(\varphi(x), x) - f(\varphi(y), y)| \\
&\leq |f(\varphi(x), x) - f(\varphi(y), x)| + |f(\varphi(y), x) - f(\varphi(y), y)| \\
&< \lambda|\varphi(x) - \varphi(y)| + |f(\varphi(y), x) - f(\varphi(y), y)|
\end{aligned}$$

Daí,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{1}{1-\lambda}|f(\varphi(y), x) - f(\varphi(y), y)|$$

e se $x \to y$, $|f(\varphi(y), x) - f(\varphi(y), y)|$ vai a 0, pois f é contínua na segunda variável, de onde segue a afirmação. $\square$

Questão 3. a) Prove que para toda aplicação contínua f definida num conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}$, existe um ponto $x_m \in X$ tal que $f(x) \geq f(x_m)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Veja a prova do corolário 3 (p.21 do Elon). □

b) Seja f função contínua na bola fechada $B[0, r]$, com valores em $\mathbb{R}$. Prove que para cada $y \in [f(x_m), f(x_M)]$, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Aqui x_M é tal que $f(x_M)$ é o supremo de f em $B[0, r]$.

Demonstração. É o Teorema do Valor Intermediário (no caso de uma bola), que segue do corolário 7 (p.29 do Elon). □

Questão 4. Responda verdadeiro ou falso justificando sua resposta nas seguintes questões:

a) A inversa de uma aplicação $1 - 1$ de Lipschitz é de Lipschitz.

Demonstração. Falso. Considere x^2 em $[0; 1]$. □

b) A composta de duas aplicações uniformemente contínuas é uniformemente contínua.

Demonstração. Verdadeiro. Demonstração análoga a do teorema 14 (p.20 do Elon). □

c) Toda função uniformemente contínua é de Lipschitz.

Demonstração. Falso. Considere $\sqrt{x}$ em $[0; 1]$. □

d) $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e só se, $d(a, X) = 0$ implica que $a \in X$.

Demonstração. Verdadeiro.
$\Rightarrow$
É o exercício 3 da lista 2.
$\Leftarrow$
Considere $x_k \to a$, $x_k \in X$ para todo k. Segue, da definição de d que $d(a, X) = 0$, de onde $a \in X$. Portanto, X é fechado por definição. □