PROVA 3 - GABARITO
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Questão 1. a) Sejam $\mathbb{M}_i$, $i = 1, 2$ superfícies (também denominadas hiperfícies) de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$.

Suponha que em todo ponto p de $\Gamma = \mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2$ os espaços normais $N_i(p)$, $i = 1, 2$ são linearmente independentes.

Mostre que Γ, se não for vazio, é a união de curvas (isto é caminhos) regulares de classe C^1.

Demonstração. Basta fazermos a análise localmente.

Considere $p = (x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ e sejam ξ_i, $i = 1, 2$, como na definição de hiperfície (pg. 87 do Elon), tais que $(x_0, y_0, \xi_1(x_0, y_0)) = p = (x_0, \xi_2(x_0, z_0), z_0)$. Localmente, podemos dizer, por exemplo (a coordenada em que ξ_i aparece é indiferente para a análise) que $M_1 = \{(x, y, z),\ z - \xi_1(x, y)) = 0\}$ e $M_2 = \{(x, y, z),\ y - \xi_2(x, z) = 0\}$.

Assim, a intersecção Γ das hiperfícies é dada (perto de p) por $\{F_1(x, y, z) = z - \xi_1(x, y)) = 0,\ F_1(x, y, z) = y - \xi_2(x, z) = 0\}$.

A hipótese dos espaços normais serem LI é equivalente a $\nabla F_1(p) = (-\frac{\partial \xi_1}{\partial x}, -\frac{\partial \xi_1}{\partial y}, 1)(p)$ e $\nabla F_2(p) = (-\frac{\partial \xi_2}{\partial x}, 1, -\frac{\partial \xi_2}{\partial z})(p)$.

Mas estas são as linhas da matriz Jacobiana de $F = (F_1, F_2)$ em p. Assim, aplicando o Teorema da Aplicação Implícita a $F = 0$, temos a curva de classe C^1, passando por p, que esta contida na intersecção Γ.

$\square$

b) Sejam $f_1 = x^2 + y^3 - c_1$ e $f_2 = x^2 + (y + d)^2 - c_2$.

Determine c_1, c_2, d para que $\mathbb{M}_i = (f_i)^{-1}(0)$, $i = 1, 2$ sejam ambas como em *a*), primeira frase.

Demonstração. Basta aplicar o teorema 3 da página 89 do Elon pra resolver o exercício: considere $\nabla f_1(x, y, z) = (2x, 3y^2, 0)$ e $\nabla f_2(x, y, z) = (2x, 2(y + d), 0)$. Temos que impor duas condições: $(f_i)^{-1} \neq \emptyset$ e não ser apenas 1 ponto, $i = 1, 2$, de onde temos que $c_i > 0$, $i = 1, 2$ e, então, basta ver que nessas pre-imagens temos $\nabla f_i(x, y, z) \neq 0$. Daí temos que d é um parâmetro livre. Geometricamente, f_2 define um cilindro transladado no eixo y, de onde temos intuitivamente que d não deveria interferir na análise.

$\square$

c) Determine r_1, r_2 para que $\mathbb{M}_1 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 - r_1 = 0\}$ e $\mathbb{M}_2 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 - r_2 = 0\}$ sejam como em *a*), segunda frase. Descreva Γ e ilustre geometricamente sua resposta.

4 Pontos: a, 2; b, 1; c, 1.

Demonstração. Basta termos $r_1 \neq r_2$ e $r_i > 0$ para $i = 1, 2$. É fácil ver que se $r_1 = r_2$, existem 2 pontos de tangência em que $\nabla f_1 = \nabla f_2$, onde $f_1 = x^2 + y^2 - r_1$ e $f_2 = x^2 + z^2 - r_2$. Nos demais pontos de interseção, é fácil calcular os gradientes (como no item b) e notar que estes são LI. Geometricamente, são dois cilindros perpendiculares, de onde temos claramente esta interpretação. □

Questão 2. a) Enuncie com precisão matemática os Teoremas da Aplicação Inversa e da Aplicação Implícita (esta última na forma forte, dita "Forma Normal das Submersões".

Demonstração. Teorema da Aplicação Inversa: ver página 115 do Elon.
Forma Local das Submersões: ver página 117 do Elon. □

b) Prove que estes Teoremas são proposições matemáticas equivalentes.

Demonstração. A Forma Local das Submersões é implicada pelo Teorema da Aplicação Inversa como se vê na sua demonstração na página 118 do Elon.

O Teorema da Aplicação Inversa decorre da Forma Local das Submersões e/ou do Teorema da Função Implícita diretamente da seguinte aplicação: dada $f(x)$ nas condições do Teorema da Aplicação Inversa em x_0, considere $F(x, y) = f(x) - y$ e é claro ver que em (x_0, y_0), com $y_0 = f(x_0)$, esta aplicação satisfaz a Forma Local das Submersões e que a função dada implicitamente neste teorema é a inversa (local) da f. □

c) Demonstre um dos Teoremas em a). Ilustre geometricamente o seu raciocínio, quando pertinente.

4 Pontos: a, 1; b, 1; c, 2.

Demonstração. Ver páginas 113 a 116 do Elon pra Teorema da Aplicação Inversa e páginas 117 a 120 para Forma Local das Submersões e Teorema da Função Implícita. □

Questão 3. a) Explique o Método dos Multiplicadores de Lagrange no caso de 1 e 2 multiplicadores. Isto é formule as hipóteses para sua validade e as suas conclusões.

b) Dê um exemplo de aplicação em cada caso.

2 Pontos: a, 1; b, 1.

Demonstração. Para 1 multiplicador: ver páginas 91 a 95 do Elon para explicação e exemplos.

Para vários multiplicadores: ver páginas 138 a 141 do Elon para explicação e exemplos. □