PROVA 4 – GABARITO
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Questão 1. Responda verdadeiro ou falso justificando sua resposta nas seguintes questões:

a) Toda aplicação de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que é de classe C^1, injetora (i.e. $1-1$) e sobrejetiva (sobre) tem uma inversa que é diferenciável em $\mathbb{R}^n$.

Falso. Considere $f(x) = x^3$.

b) Para toda seqüencia (Y_n) de matrizes $p \times p$, $p \geq 1$ convergente a I, identidade $p \times p$, existe uma seqüencia (X_n) convergente a I, tal que para n suficientemente grande $(X_n)^2 = Y_n$.

Verdadeiro. Considere $F(X) = X \times X = X^2$, que é um difeomorfismo de classe C^∞ de uma vizinhança V de I (= identidade) sobre uma vizinhança W de I. Isto decorre do Teorema da Aplicação Inversa, pois $F'(I).H = 2H$ é invertível. Seja $G = F|_V{}^{-1}$. Para n suficientemente grande, definir $X_n = G(Y_n)$.

c) Toda função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais continuas em $\mathbb{R}^n$ é de Lipschitz em cada bola aberta $B(a, r), a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

Verdadeiro. Definir $L = \sup\{f'(x), x \in B[a, r]\}$. Este sup é finito pela continuidade de f' e compacidade de $B[a, r]$. Aplicar a desigualdade do valor médio para obter $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todo par $x, y \in B(a, r)$.

d) Existe um difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ sobre si mesmo que aplica $S^2 = \{(x, y, z)\ ; x^2+y^2+z^2-1 = 0\}$ sobre $Q^2 = \{(x, y, z)\ ; |x|+|y|+|z|-1 = 0\}$.

Falso. Seja f o hipotético difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ sobre si mesmo que aplica S^2 sobre Q^2. Seja $g = f^{-1}$ o difeomorfismo inverso. O ponto $N = (0, 0, 1) \in Q^2$ é aplicado no ponto $M = g(N) \in S^2$. Os segmentos $\gamma_i, i = 1, 2, 3$, em Q^2 com extremos direitos em N e vetores velocidades $v_i, i = 1, 2, 3$, com $v_1 = (-1, 0, 1), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (0, 1, 1)$, devem verificar o seguinte: Os vetores $g'(N)v_i, i = 1, 2, 3$, são linearemente independentes em $\mathbb{R}^3$; por outro lado $g'(N)v_i = (g \circ \gamma_i)'(0), i = 1, 2, 3$. Mas estes vetores do lado direito estão contidos no plano tangente em M a S^2, o qual tem dimensão 2. Contradição.

6 Pontos: a, 1.5; b, 1.5; c, 1.5 ; d, 1.5.

As outras questões estão no Livro de Elon , Bartle ou foram desenvolvidas em aula.