SUBS–GABARITO,
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Questão 1. Responda verdadeiro ou falso, justificando sua resposta nas seguintes questões:

a) Para todo $n > 0$ existem aplicações $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 que são $1-1$.

Falso. Para $n = 1$ é fácil ver que não existe a tal f. De fato: 1) se $f' = 0$, identicamente, então ela e constante, identicamente; 2) se $f' \neq 0$ em algum ponto, digamos (a, b), então pelo Teorema da Função Implícita existiria uma curva γ de classe C^1 tal que $f \circ \gamma = f(a, b)$, identicamente. Lembro disto ter entrado numa lista.

b) Para toda seqüencia (Y_n) de matrizes $p \times p$, $p \geq 1$ convergente a I, identidade $p \times p$, existe uma seqüencia (X_n) convergente a I, tal que para n suficientemente grande $(X_n)^{-1} = Y_n$.

Verdadeiro. Aplicar o Teorema da Função Inversa no ponto I a $F(X) = X^{-1}$. Deve verificar as hipóteses para aplicar corretamente este Teorema. Ver Livro. **Outra solução**: Aplicar a formula de Binet para a inversa de uma matriz com determinante não nulo, em termos de menores da transposta. Fizemos em aula.

c)Toda função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais continuas em $\mathbb{R}^n$ é uniformemente continua em cada bola aberta $B(a, r), a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

Verdadeiro. Usar a continuidade das funções com derivadas parciais continuas e continuidade uniforme de funções continuas num compacto, no caso $B[a, r]$, que contém $B(a, r)$.

Outra solução: Usar o Teorema do Valor Médio para provar que f é de Lipschitz em $B[a, r]$, compacto, que contém $B(a, r)$.

d) Existe um difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ sobre si mesmo que aplica $S^2 = \{(x, y, z);\quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ sobre $E^2 = \{(x, y, z)\ ; 25x^2 + 16y^2 + 9z^2 - 50x - 32y - 18z + 1 = 0\}$.

Verdadeiro. Provar que E^2 é um elipsóide com "centro" $C = (1, 1, 1)$ e eixos paralelos aos eixos coordenados. Depois, usar a idéia da P1 para encontrar o difeomorfismo como uma translação mais transformação linear diagonal.

6 Pontos: a, 1.5; b, 1.5; c, 1.5 ; d, 1.5.

As outras perguntas estão respondidas no Livro ou foram desenvolvidas em aula.

Questão 2. Escolha uma das seguintes proposições e a demonstre. Quando pertinente torne explicito ou mais preciso o enunciado.

a) **A Desigualdade do Valor Médio para Funções Diferenciáveis.**

b) **Teorema de Schwarz**. Toda função com derivadas parciais de segunda ordem continuas em $\mathbb{R}^2$ tem matriz Hessiana simétrica.

c) **Isto inclui a Regra da Cadeia**. A composta de duas aplicações diferenciáveis de classe C^1 é de classe C^1.

2 Pontos. Indique claramente a sua escolha.

Questão 3. Prova de Erudição, valendo ate 2 pontos, para ser abordada depois de resolver as questões 1 e 2.

Escolha um dos seguintes assuntos e o desenvolva matematicamente ate chegar a algum resultado completo. Tal resultado deve justificar-se dentro do Curso de Cálculo V por sua importância teórica ou aplicabilidade. Elabore matematicamente esta justificação.

a) Os Espaços Métricos de Funções Continuas e Diferenciáveis e a Convergência Uniforme em Análise.

b) Os Multiplicadores de Lagrange e Aplicações.

c) O Teorema da Aplicação Implícita e Aplicações.