LISTA 2
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Os exercícios 1, 6, 9 e 10 são obrigatórios. Além disso, você deve escolher 1 exercício dentre os exercícios 2, 3, 4 e 5; e mais 1 exercício dentre o 7 e 8.

Exercício 1. Prove diretamente, usando a definição equivalente de compacto pela propriedade das coberturas abertas[1], que se K é compacto em $\mathbb{R}^n$ e se F é fechado e $F \subset K$, então F é compacto em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 2. Prove que se K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, então K é compacto quando visto como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 3. Prove que se $F \neq \emptyset$ é fechado em $\mathbb{R}^n$ e se $d(x, F) = 0$, então $x \in F$.

Exercício 4. Prove que se K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e se $x \in \mathbb{R}^n$, então o conjunto $K_x = \{x + y : y \in K\}$ também é compacto. (o conjunto K_x é algumas vezes chamado a **translação** de K por x.)

Exercício 5. Considere $X \subset \mathbb{R}^n$. Se para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \cap X$ é compacto, prove que X é fechado.

Exercício 6. Mostre que toda norma em $\mathbb{R}^n$ é contínua [2].

Exercício 7. Se $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é um polinômio e $c \in \mathbb{R}$, mostre que o conjunto $\{(x, y) : p(x, y) < c\}$ é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 8. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha < \beta$, mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha \leq f(x) \leq \beta\}$ é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 9. Prove que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é desconexo se, e somente se, existe uma função contínua $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $f(D) = \{0, 1\}$.

Exercício 10. Seja $\varphi : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ para $t \in [0, 2\pi[$. Então φ é uma aplicação contínua e injetora de $[0, 2\pi[$ sobre o círculo unitário $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Mostre que $\varphi^{-1} : S \to [0, 2\pi[$ não pode ser contínua.

---

[1] $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e só se, toda cobertura por abertos de K admite uma subcobertura finita.

[2] Lembramos que $||.||$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$ se satisfaz as propriedades:

(1) $||x|| \geq 0$ e $||x|| = 0$ implica que $x = 0$
(2) $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$
(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$