LISTA 3-COMPLEMENTOS
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Estes exercícios servem para revisar o material visto até agora. Os dois primeiros complementam pontos pendentes na aula de sexta 17/09; os outros são aditivos aos propostos no Livro.

Exercício 1. Seja (a_k) uma sequência de pontos de $\mathbb{R}^n$, mostre que se $(\Sigma|a_k|)$ (a série das normas de (a_k)) é uma série numérica convergente, então a sequência (s_k) de *somas parcias* de (a_k), definida por $s_k = \Sigma_{i=1}^k a_i$, é convergente em $\mathbb{R}^n$. (Sugestão: Prove que (s_k) é de Cauchy.)

Suponha que existe $\lambda < 1$ tal que $|a_{k+1|}/|a_k| \leq \lambda$, para todo $k \geq 0$. Prove que (s_k) é convergente em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 2. Seja S uma aplicação de $\mathbb{R}^n$ nele próprio com *constante de Lipschitz* $\lambda < 1$. Lembramos que λ é o *supremo* de $\{|S(x) - S(y)|/|x-y|,\ x \neq y\}$. Prove que para todo $y \in \mathbb{R}^n$, existe um único $R = R(y)$ tal que $R(y) + S(y + R(y)) = 0$. (Sugestão –Existência– Mostre que a sequência de *aproximações sucessivas* $R_0 = 0, R_1 = -S(y), R_2 = -S(y + R_1), ..., R_n = -S(y + R_{n-1}), ...$ é convergente. Para tanto aplique à sequência $(a_k = R_k - R_{k-1})$ as propriedades vistas no exercício anterior. Sugestão –Unicidade– Fácil).

Mostre que a aplicação $y \to R(y) = \lim_{n\to\infty} R_n$ do $\mathbb{R}^n$ nele próprio, definida pela convergência no item anterior, satisfaz uma condição de Lipschitz com *constante de Lipschitz* $\sigma \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}$. Prove que $F = I + S$, aqui I é a *identidade* e S é como acima, é um homeomorfismo cuja inversa é dada por $F^{-1} = I + R$.

Compare com o Problema proposto no e-mail de quinta 16/09, onde $S = rsinx$, com $|r| < 1$ e $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. Defina com precisão os seguintes tipos de conjuntos de $\mathbb{R}^n$: a) Compacto, b) Conexo, c) Fechado, d) Conexo por caminhos e e) Aberto. Prove que todo aplicação continua de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ preserva alguns destes tipos. Diga quais são preservados ou dé um contraexemplo.

Dê exemplos de conexos que são conexos por caminhos e que nao são.

Prove que todo conexo aberto é conexos por caminhos.

Prove que o fecho de um conexo é conexo.

Exercício 4. Formule os Teoremas do Valor Intermediário e de Weierestrass (Principio do Máximo, Corolário 3 no Livro).

Prove estes teoremas da forma mais autosuficiente possível. Compare sua demonstração com a vista em cursos anteriores. Identifique situações nestes cursos onde estes resultados aparecem.

Faça um balanço dos resultados dos cursos de Cálculo, por ter sido protelados para os cursos de Análise, ficaram por demonstrar.

Exercício 5. Prove que se X é compacto em $\mathbb{R}^n$ e f é $1-1$ e contínua sobre $Y = f(X) \subset \mathbb{R}^m$ então f e um homeomorfismo de X sobre Y.

Exercício 6. Prove que a composição de duas aplicações de Lipschitz é de Lipschitz.

A inversa de uma aplicação $1-1$ de Lipschitz é de Lipschitz?.

Estude e responda esta pergunta no caso de aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ nele próprio.

Exercício 7. Prove que a função $a \to d(a, X)$, distância de $a \in \mathbb{R}^n$ a $X \subset \mathbb{R}^n$, é de Lipschitz.

Prove e interprete geometricamente o Teorema da "Alfandega"(pág. 30 Livro).

Em caso (de conjuntos X), para todo $a \in \mathbb{R}^n$ existe algum ponto $x_a \in X$ tal que $d(a, X) = |a - x_a|$?

Seja X o *gráfico* de $x_2 = x_1^2$ em $\mathbb{R}^2$. Para cada $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, determine $x_a \in X$ tal que $d(a, X) = |a - x_a|$.

Determine o conjunto $A_i \subset \mathbb{R}^2$ tal que para $a \in A_i$ há exatamente i pontos da forma $x_a \in X$.

Exercício 8. Determine quais das funções a seguir que são uniformenente contínuas nos seus dominios X de $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, c) $f(x) = \sin(1/x)\,, x > 0$, d) $f(x) = \sin(x)$, $x > 0$.

Exercício 9. Seja f uma aplicação definida bola aberta $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^m$. Prove que f admite uma extenção F continua na bola fechada $B[0,1]$ se e somente se f é uniformemente contínua em $B(0,1)$.

Exercício 10. Se uma aplicação f de $\mathbb{R}^n$ nele proprio tem constante de Lipschitz $\lambda < 1$ chama-se *contração.*

Prove que para toda *contração* f de $\mathbb{R}^n$ existe um único ponto p tal que $f(p) = p$, dito *ponto fixo* de f.

Sugestão: Prove que para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a sequência (x_k) de *iterados* de f, definida por $x_k = x_{k-1}$, converge para p. Use a mesma idéia do Exercício 2.