LISTA 5
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Exercício 1. Suponha que $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto, é diferenciável e que f tem máximo em $x \in E$. Mostre que $f'(x) = 0$

Exercício 2. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Prove que se $f : U \to \mathbb{R}$ possui derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ limitadas, então f é contínua.

Exercício 3. Seja $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$.

a) Prove que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são limitadas em $\mathbb{R}$ (*e, pelo exercício anterior, temos que f é contínua*).

b) Seja $u \in \mathbb{R}^2$ um vetor unitário. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ existe e é limitada em valor absoluto por 1.

c) Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ diferenciável, com $\gamma(0) = (0,0)$ e $|\gamma'(0)| > 0$ e considere $g(t) = f(\gamma(t))$. Prove que g é diferenciável para todo $t \in \mathbb{R}$. Se γ for de classe C^1, prove que g é de classe C^1.

d) Apesar disso, prove que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ diferenciável, com $f(0) = 0$. Prove que se $f'(0)$ não tem 1 como autovalor, então existe uma vizinhança V da origem tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V - \{0\}$.

Exercício 5. Seja $A : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^p$. Defina $f : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ por $f(x,v) = A(x).v$. Prove que f é diferenciável, com $f'(x,v).(h,k) = (A'(x).h).v + A(x).k$.

Exercício 6. Seja $f(x,y,z) = (x^2-y^2, xy, xz, zy)$. Mostre que $f'(x,y,z)$ é injetiva exceto quando $x = y = 0$. Determine a imagem de $f'(0,0,z)$.