LISTA 6
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Esta lista é para estudo individual e consiste de uma seleção de exercícios básicos importantes. Sugerimos que seja feita sem consulta às respostas da forma mais auto-suficiente possível.

Exercício 1. Sejam $f, \varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $< f(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) >= 0$ para todo $x \in U$ e todo $i = 1, \ldots, n$. Prove que a matriz $[a_{ij}(x)]$, onde $a_{ij}(x) =< \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) >$, é simétrica seja qual for $x \in U$.

Exercício 2. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, o qual contém a e $a + v$, com $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Escreva $df(a).v = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.\alpha_i$, $d^2 f(a).v^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.\alpha_i.\alpha_j$ e $d^3 f(a).v^3 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}.\alpha_i.\alpha_j.\alpha_k$, as derivadas parciais sendo calculadas no ponto $x = a$ e os índices i, j, k variando de 1 a n. Ponha:

$$f(a + v) - f(a) = df(a).v + \frac{1}{2} d^2 f(a).v^2 + \frac{1}{3!} d^3 f(a).v^3 + r(v)$$

e prove que $\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|^3} = 0$. Estenda o resultado para funções de classe C^k, $1 \leq k < \infty$.

Exercício 3. Determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$. Idem para $g(x, y) = x^3 - y^3 - x + y$.

Exercício 4. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável no aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^n$. Se, para todo $a \in \text{fr}.U$ tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, prove que existe em U pelo menos um ponto crítico de f.

Exercício 5. Verifique que $(1, 1, 1)$ é ponto crítico de $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ e determine sua natureza (máximo, mínimo, etc) através da análise da Hessiana.

Exercício 6. Defina f em $\mathbb{R}^3$ por

$$f(x, y_1, y_2) = x^2 y_1 - e^x + y_2$$

e mostre que $f(0, 1, -1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 1, -1) \neq 0$ e que existe, portanto, uma função diferenciável g em agluma vizinhança de $(1, -1)$ em $\mathbb{R}^2$, tal que $g(1, -1) = 0$ e $f(g(y_1, y_2), y_1, y_2) = 0$ para todo (y_1, y_2) nesta vizinhança. Determine $\frac{\partial g}{\partial x_1}(1, -1)$ e $\frac{\partial g}{\partial x_2}(1, -1)$.

Exercício 7. Considere $f(x, y, z) = x^4 + 2x\cos y + \sin z$. Prove que numa vizinhança de 0, a equação $f(x, y, z) = 0$ define z como uma função de classe C^∞ das variáveis x, y. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Exercício 8. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale $g(x) = f(x)(1+f(x)^4)$. Se g é de classe C^k, $k \geq 1$, prove que f também é de classe C^k.