LISTA 7
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Exercício 1. Teorema A $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma *hiperfície* de classe C^k (no sentido da pág. 87) se, e somente se, todo $p \in M$ tem uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ onde está definido um homeomorfismo ψ sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\psi^{-1} : U \to V \cap M$ é de classe C^k e para todo $u \in U$, $(\psi^{-1})'(u)$ tem posto n.

a) Prove isto para $k = 1, n = 1$ e $n = 2$ (curvas e superfícies). Pode usar o Teorema da Aplicação inversa no plano, o qual você também deverá demonstrar a partir do Teorema da Função Implícita (pág. 84). Veja o exercício 4 abaixo.

b) Prove que T_pM é gerado por $\{\frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u_i}(u), i = 1, \ldots, n\}$, onde $u = \psi(p)$. Calcule N_p, um vetor normal a M em p.

c) Prove que a Faixa de Moebius

$$M_f = p = ((2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin u, (2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos u, v \cos \frac{u}{2}), u \in \mathbb{R}, v \in (-1, 1)$$

é uma superfície, a qual não é orientável.

d) A mesma coisa (ie, que é uma superfície somente) para o Toro de Revolução (defina!).

Exercício 2. Considere o segmento $L = [(0, 1), (0, 3)]$. Seja $f(x, y)$ o ângulo, no vértice (x, y), do triângulo gerado por L e (x, y).

a) Determine as curvas de nível de f.

b) Encontre o ponto no eixo x onde f é máxima.

Exercício 3. Pegue o exercício 1 da seção 1 (pág. 96) e formule uma extensão para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $y \in \mathbb{R}$. Prove sua extensão.

Exercício 4. Sejam f e g funções de classe C^1 em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, com coordenadas (x, y, z). Suponha que $f(0, 0, 0) = g(0, 0, 0) = 0$ e

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} (0, 0, 0) \neq 0$$

Prove que existem duas funções φ, ψ de classe C^1 numa vizinhança U de $0 \in \mathbb{R}^n$ tais que $f(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$ e $g(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$, para todo $x \in U$.

Calcule $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)$ para $x \in U$.

Estenda isto para classe C^k e m funções em lugar de 2.