LISTA 8
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Exercício 1. Sejam $f_i : U_i \to \mathbb{R}, i = 1, 2$, duas funções de classe C^k, $k \geq 0$, em abertos $U_i, i = 1, 2$ de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que f_1 em $p_1 \in U_1$ é $C^r, r \geq 1$, equivalente à direita a f_2 em $p_2 \in U_2$ se existem vizinhanças abertas V_i de p_i, $i = 1, 2$, e um difeomorfismo $h : (V_1, p_1) \to (V_2, p_2)$ (i.e., de V_1 sobre V_2, com $h(p_1) = p_2$) tais que h é de classe C^r e $f_2 \circ h|_{V_1} = f_1|_{V_1}$.

Hipótese H: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Suponha que $(f'(x))^2 + (f''(x))^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prove que, sob a hipótese H, para todo $x_1 \in \mathbb{R}$, f em x_1 é C^1 equivalente à direita a uma das 3 seguintes funções em $x_2 = 0$:

a) $f_{2,1}(x) = c + x$;
b) $f_{2,2+}(x) = c + x^2$; ou
c) $f_{2,2-}(x) = c - x^2$
com $c = f(x_1)$.

Sugestão A: Suponha (compondo com translações) que $c = 0$ e $x_1 = 0$. Reduza inicialmente a prova a um dos casos:

a) $f'(0) \neq 0, f_{2,1}(x) = f'(0).x$
b) $f'(0) = 0, f''(0) > 0, f_{2,2+}(x) = f''(0)\frac{x^2}{2}$
c) $f'(0) = 0, f''(0) < 0, f_{2,2-}(x) = f''(0)\frac{x^2}{2}$

Sugestão B: Use a Fórmula de Taylor com resto integral para f em uma vizinhança de 0 (ver *Análise Real*, vol. 1 do E. Lima, p. 136 ou fonte de referência equivalente). Formule a definição geométrica de h de modo a usar o Teorema da Função Inversa.

Exercício 2. Determine o conjunto χ de pontos $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ tais que $f(x) = x^3 + \xi_1 x^2 + \xi_2 x + \xi_3$ *não* satisfaz à hipótese H em (1). Prove que $\mathbb{R}^3 \setminus \chi$ é aberto e denso em $\mathbb{R}^3$.

Sugestão: Relembre a álgebra do ginásio.

Exercício 3. Prove que $f_1(x_1, x_2) = \frac{a}{2}x_1^2 + bx_1x_2 + \frac{c}{2}x_2^2$ com

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \neq 0$$

é, em $(0, 0)$, C^∞ equivalente à direita a uma única das seguintes formas q, em $(0, 0)$:

a) $q = q_0 = x_1^2 + x_2^2$;
b) $q = q_1 = x_1^2 - x_2^2$;
c) $q = q_2 = -x_1^2 - x_2^2$.

Exercício 4. Prove que não existe difeomorfismo h de classe C^1 de um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ sobre um aberto $B \subset \mathbb{R}^2$ tal que $h(S^1_E(\varepsilon)) = S^1_{\text{sup}}(\delta)$, onde $S^1_E(\varepsilon)$ denota um círculo Euclidiano de raio $\varepsilon > 0$ e $S^1_{\text{sup}}(\delta)$ denota um círculo na norma do sup (ou máximo) e raio $\delta > 0$.

Exercício 5. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Prove que $G(x, y) = (x+g(y), y)$ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$. Determine G^{-1}.