Teorema da Aplicação Inversa

Daniel Panazzolo

5 de novembro de 2004

Vamos provar o Teorema da Função Inversa *à la Picard*, i.e. construindo a aplicação inversa como ponto fixo de uma certa contração em um espaço métrico funcional.

Vamos começar com a seguinte Proposição:

Proposição 0.1 *Seja $f : U \to V$ um homeomorfismo entre abertos de $\mathbb{R}^n$, diferenciável em todo ponto e tal que tal que $f'(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in U$. Então, a aplicação inversa $g = f^{-1}$ diferenciável em todo ponto $y \in V$, e*

$$g'(y) = f'(g(y))^{-1}$$

PROVA:Fixemos um ponto $a \in U$ e sua imagem $b = f(a) \in V$. Compondo a função f com a transformação linear $A(y) = f'(a)^{-1}(y)$, podemos assumir que $f'(a) = \mathrm{Id}$. Além disso, efetuando uma translação no domínio e na imagem, podemos supor que $a = b = 0$.

Tomemos um ponto $x \in U$ próximo da origem e seja $y = f(x)$ a sua imagem. Pela diferenciabilidade de f na origem, podemos escrever

$$y - x = \|x\| R(x)$$

para alguma função $R(x)$ tal que $\lim_{x\to 0} R(x) = 0$. Desta igualdade, obtemos

$$\|y\| \geq (1 - \|R(x)\|)\|x\|$$

Portanto,

$$\|y - x\| \leq \|y\| \frac{|R(x)|}{1 - \|R(x)\|}$$

Como f é um homeomorfismo, é claro que fazer $y \to 0$ é equivalente a fazer $x \to 0$. Como consequência, $\lim_{y\to 0} R(x) = 0$. A expressão acima implica que g é diferenciável em $y = 0$, e sua derivada é $g'(0) = \mathrm{Id}$.

Q.E.D.

Corolário 0.2 *No enunciado acima, se supusermos que f é de classe C^1 então g também é de classe C^1.*

PROVA: De fato, a aplicação $g' : V \to L(\mathbb{R}^n)$ é dada pela composição de três aplicações contínuas

$$y \mapsto g(y) \mapsto f'(g(y)) \mapsto (f'(g(y))^{-1}$$

Q.E.D.

A Proposição a seguir utiliza o Teorema do Ponto fixo para construir a inversa de uma *perturbação da identidade* $f = \mathrm{id} + \phi$ (com ϕ suficientemente pequena).

Proposição 0.3 *Dados $0 < k < 1/2$ e $r > 0$, seja $f : \overline{B(r)} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação da forma*

$$f(x) = x + \phi(x)$$

onde ϕ é uma aplicação k-Lipschitziana tal que $\phi(0) = 0$. Então, se definimos

$$s = \min\{r/2, r/2(1/k - 1)\},$$

existe uma aplicação $g : \overline{B(s)} \to \mathbb{R}^n$ da forma

$$g(y) = y - \psi(y)$$

onde ψ é uma aplicação $k/(1-k)$-Lipschitziana tal que $\psi(0) = 0$ e $f \circ g = \mathrm{id}$.

PROVA: Assumindo que $g(y) = y - \psi(y)$, a equação $y = f(g(y))$ é equivalente a

$$\psi(y) = \phi(y - \psi(y)).$$

Seja $C_0(\overline{B(s)})$ o conjunto de todas as aplicações contínuas com domínio $\overline{B(s)}$ e que se anulam na origem. Denotamos por $X \subset C_0(\overline{B(s)})$ o subconjunto daquelas aplicações que são $k/(1-k)$-Lipschitzianas, e cuja imagem está contida em $\overline{B(r/2)}$. Se munirmos o conjunto X da métrica

$$d(\psi_1, \psi_2) = \max_{y \in \overline{B(s)}} |\psi_1(y) - \psi_2(y)|$$

pode-se verificar facilmente que (X, d) é um espaço métrico completo.

Vamos considerar a função definida em X pela seguinte fórmula

$$T(\psi)(y) = \phi(y - \psi(y)), \qquad \text{para todo } y \in \overline{B(s)}$$

Note que, como $\psi(y) \in \overline{B(r/2)}$ e $y \in \overline{B(s)}$, temos

$$\|y - \psi(y)\| \leq \|y\| + \|\psi(y)\| \leq s + \frac{r}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Logo, o ponto $y - \psi(y)$ pertence a $\overline{B(r)}$ e a função composta $\phi(y - \psi(y))$ é claramente um elemento de $C_0(\overline{B(s)})$.

Afirmamos que a função T tem as seguintes propriedades:

(i) $T : X \to C_0(\overline{B(s)})$ é uma aplicação k-Lipschitziana.

(ii) $T(X) \subset X$;

Para provar (i), vamos tomar duas funções arbitrárias $\psi_1, \psi_2 \in X$. Usando o fato de que ϕ é k-Lipschitziana, obtemos

$$\|T(\psi_1)(y) - T(\psi_2)(y)\| = \|\phi(y - \psi_1(y)) - \phi(y - \psi_2(y)\| \leq k\|\psi_1(y) - \psi_2(y)\|,$$

para todo $y \in \overline{B(s)}$. Portanto, $d(T(\psi_1), T(\psi_2)) \leq kd(\psi_1, \psi_2)$.

Para provar (ii), vamos verificar primeiramente que $\|T(\psi)(y)\| \leq r/2$ para todo $y \in \overline{B(s)}$ e todo $\psi \in X$. De fato,

$$\begin{aligned} \|T(\psi)(y)\| = \|\phi(y - \psi(y)) - 0\| &= \|\phi(y - \psi(y)) - \phi(0)\| \leq k\|y - \psi(y)\| \\ &\leq k\left(s + \frac{r}{2}\right) \leq k\left(\frac{r}{2}\left(\frac{1}{k} - 1\right) + \frac{r}{2}\right) \leq \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Por outro lado, para todo $y_1, y_2 \in \overline{B(s)}$,

$$\begin{aligned} \|T(\psi)(y_1) - T(\psi)(y_2)\| &\leq k\|y_1 - \psi(y_1) - y_2 + \psi(y_2)\| \\ &\leq k(\|y_1 - y_2\| + \|\psi(y_1) - \psi(y_2)\|) \\ &\leq k(1 + \frac{k}{1-k})\|y_1 - y_2\| = \frac{k}{1-k}\|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

Logo, $T(X) \subset X$.

Portanto, o Teorema do Ponto Fixo pode ser aplicado à função $T : X \to X$. Concluímos que existe um único $\psi \in X$ tal que $T(\psi) = \psi$.

Portanto, a função $g(y) = y - \psi(y)$ é a inversa de f.

Q.E.D.

Finalmente, podemos provar o Teorema da Aplicação Inversa:

Teorema 0.4 *Seja $f : U \to V$ uma aplicação de classe C^1 entre abertos de $\mathbb{R}^n$, e seja $a \in U$ um ponto tal que $f'(a)$ é um isomorfismo. Então, existe uma vizinhança $U' \subset U$ de a e uma vizinhança $V' \subset V$ de $b = f(a)$ tal que*

$$f : U' \to V'$$

é um difeomorfismo.

Prova:Compondo a função f com a transformação linear $A(y) = f'(a)^{-1}(y)$, podemos assumir que $f'(a) = \mathrm{Id}$. Além disso, efetuando uma translação no domínio e na imagem, podemos supor que $a = b = 0$.

A aplicação $\phi(x) = f(x) - x$ é de classe C^1 e $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. Portanto, dado um $k > 0$ arbitrário, podemos escolher $r > 0$ tal que $\overline{B(r)} \subset U$ e

$$\max_{x \in \overline{B(r)}} |\phi'(x)| \leq k$$

Pelo Teorema do valor médio, isto implica que ϕ é uma função k-Lipschitziana em $\overline{B(r)}$.

O Teorema é portanto uma consequência das duas Proposições anteriores.

Q.E.D.