LISTA PARA REVISÃO 1
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Exercício 1. Considere $F(x,y) = (2x + y, 3x + 2y)$ e $G(u,v) = (2u - v, -3u + v)$. Seja $H = G \circ F$. Calcule H explicitamente e sua matriz Jacobiana no ponto $(x_0, y_0) = (5, 7)$. Então, utilizando a regra da cadeia, calcule novamente a matriz Jacobiana no mesmo ponto para comparar os resultados.

Exercício 2. Considere a curva descrita pela equação $x^2+y+\sin(xy) = 0$. É possível descrevê-la por uma equação da forma $y = f(x)$ em uma vizinhança do ponto $(0,0)$? E por uma equação da forma $x = g(y)$?

Exercício 3. Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ e seja $F : A \to \mathbb{R}$. Seja S_F a superfície em $\mathbb{R}^3$ definida implicitamente como a superfície de nível:

$$S_F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$$

Se F é diferenciável no ponto $(x_0, y_0, z_0) \in S_F$, que é interior a A, então o *espaço tangente* a S_F neste ponto é o conjunto de pontos:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A_{(x_0,y_0,z_0)}(x,y,z) = 0\}$$

onde $A_{(x_0,y_0,z_0)}$ é a aplicação afim de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} A_{(x_0,y_0,z_0)}(x,y,z) &= F(x_0,y_0,z_0) + F'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \\ &= F'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \end{aligned}$$

Mostre que o espaço tangente em (x_0, y_0, z_0) é dado por:

$$\{(x,y,z) :< \nabla F(x_0,y_0,z_0) | (x-x_0, y-y_0, z-z_0) >= 0\}$$

Assim espaço tangente a S_F é um plano se ao menos uma das coordenadas de $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ é diferente de 0. Neste caso, o espaço tangente a S_F é chamado de *plano tangente* a S_F em (x_0, y_0, z_0).