LISTA PARA REVISÃO 2
MAP0217 / MAT0311
CÁLCULO DIFERENCIAL / CÁLCULO V

Exercício 1. Seja H o hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido pela equação $< b, x >= c$. Use o método do multiplicador de Lagrange para mostrar que o ponto de H mais próximo do ponto $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ é $x = a + \frac{c - <b,a>}{|b|^2}.b$.

Exercício 2. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $n > 1$. Se o determinante jacobiano de f se anula apenas num conjunto de pontos isolados, prove que f transforma todo aberto $A \subset U$ num aberto $f(A)$. Use este fato para demonstrar que todo polinômio complexo não-constante $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação sobrejetiva, provando assim o Teorema Fundamental da Álgebra.

Exercício 3. Seja $f : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$, e seja $g : f(A) \to \mathbb{R}^n$ inversa a f (ie, $g \circ f = i_d$). Suponha que f é diferenciável em $a \in A$ e que g é diferenciável em $b = f(a)$. Se $f'(a)$ não é inversível, mostre que $g'(b)$ também não é.

Exercício 4. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(0) = 0$ e $h(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$. Mostre que $h'(0)$ é inversível, que h é sobrejetora numa vizinhança da origem, mas que h não é injetora em nenhuma vizinhança da origem. Isso contraria o Teorema da Função Inversa? (Justifique!)

Exercício 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Mostre que f não é injetora, bem como a restrição de f a qualquer subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$.