MAT5757 - Introdução aos Sistemas Dinâmicos Caóticos
Lista de exercícios

23 de março de 2012

Exercício 1. (§1.4 - Exercício 4) Ache um exemplo de um difeomorfismo $\mathcal{C}^1$ com um ponto fixo não hiperbólico que é ponto de acumulação de outros pontos fixos hiperbólicos (e veja a graça disso comparando com os resultados dos exercícios 3 e 4 desta seção).

Exercício 2. (§1.5 - Exercício 9) Construa um "Middle-Fifths Cantor set", tirando o quinto do meio de cada subintervalo remanescente do intervalo unitário em cda etapa. O que se pode dizer sobre a soma dos comprimentos dos intervalos restantes neste caso? (veja o resultado do exercício 8 nesta seção)

Exercício 3. (§1.8 - Exercício 1) Use o método do exemplo 8.9 para provar que $F(x) = 4x^3 - 3x$ é caótico no intervalo $[-1, 1]$. Dica: considere $g(\theta) = 3\theta$ em $\mathbb{S}^1$.

Exercício 4. (§1.9 - Exercícios 9 e 10) Seja $S_\lambda(x) = \lambda \sin(x)$. Se $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, prove que $S_{\lambda_1} \sim S_{\lambda_2}$. Entretanto, mostre que ambas S_{λ_1} e S_{λ_2} não são estruturalmente estáveis.

Exercício 5. (§1.9 - Exercício 14) Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ um difeomorfismo. Prove que se $f'(x) > 0$, então f tem apenas pontos fixos e nenhum ponto periódico. Prove que se $f'(x) < 0$, então f tem um único ponto fixo e todos os demais pontos períodicos tem período 2.

Exercício 6. (§1.11 - Exercício 1) Prove que a aplicação $S(x) = 2\pi \sin x$ é caótica no intervalo $[0, 2\pi]$. Dica: veja o exemplo 11.12 e o que vem antes.

Exercício 7. (§1.13 - Exercício 6) Considere a família quadrática $Q_\lambda(x) = x^2 + \lambda$. Onde esta família tem uma bifurcação sela-nó? E uma bifurcação dobradora de período? Descreva os retratos de fase e os diagramas de bifurcação na vizinhança da bifurcação em cada caso.

Exercício 8. (§1.14 - Exercício 1) Prove que um difeomorfismo de $\mathbb{S}^1$ que reverta a orientação deve ter dois pontos fixos.

Exercício 9. (§1.16 - Exercício 5) Sejam p_1 e p_2 pontos fixos repulsores e suponha que ambos os pontos admitam órbitas heteroclínicas não degeneradas conectando um ao outro. Isso é, suponha que existam $q_i \in W^u_{\text{loc}}(p_i)$ e inteiros n_1 e n_2 tais que

$$f^{n_1}(q_1) = p_2, \quad f^{n_2}(q_2) = p_1 \,.$$

Prove que f admite um conjunto hiperbólico invariante no qual a aplicação é caótica.