Introdução às formas automórficas em grupos adélicos

Valdir José Pereira Júnior

IME - USP

26 de abril de 2024

Valores absolutos

- Seja F um corpo.

Definição

Um **valor absoluto** em F é uma função $|\cdot| : F \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $|xy| = |x|.|y|$;

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Valores absolutos

- Seja F um corpo.

Definição

Um **valor absoluto** em F é uma função $|\cdot| : F \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $|xy| = |x|.|y|$;

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Se $|.|$ satisfaz a condição mais forte

(iii)' $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$,

dizemos que $|\cdot|$ é **não-arquimediano**.

Valores absolutos

- Seja F um corpo.

Definição

Um **valor absoluto** em F é uma função $|\cdot| : F \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $|xy| = |x|.|y|$;

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Se $|.|$ satisfaz a condição mais forte

(iii)' $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$,

dizemos que $|\cdot|$ é **não-arquimediano**.

Definição

Dois valores absolutos $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ são **equivalentes** (notação $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$) se existe $s > 0$ tal que $|\cdot|_2 = |\cdot|_1^s$.

Valores absolutos e valuações

Observação: Um valor absoluto $|\cdot|$ define uma métrica d em F pela fórmula

$$d(x, y) = |x - y|.$$

- Dois valores absolutos equivalentes definem a mesma topologia em F.

Valores absolutos e valuações

Observação: Um valor absoluto $|\cdot|$ define uma métrica d em F pela fórmula

$$d(x, y) = |x - y|.$$

- Dois valores absolutos equivalentes definem a mesma topologia em F.

Definição

Uma **valuação** em F é uma função $v : F^{\times} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) $v(xy) = v(x) + v(y)$;

(ii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ se x, y e $x + y$ são diferentes de 0.

Valores absolutos e valuações

Observação: Um valor absoluto $|\cdot|$ define uma métrica d em F pela fórmula
$$d(x,y) = |x-y|.$$

- Dois valores absolutos equivalentes definem a mesma topologia em F.

Definição

Uma **valuação** em F é uma função $v : F^\times \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) $v(xy) = v(x) + v(y)$;

(ii) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ se x, y e $x+y$ são diferentes de 0.

Convenção: É usual definir $v(0) = +\infty$.

Valores absolutos e valuações

Observação: Um valor absoluto $|\cdot|$ define uma métrica d em F pela fórmula
$$d(x,y) = |x-y|.$$

- Dois valores absolutos equivalentes definem a mesma topologia em F.

Definição

Uma **valuação** em F é uma função $v : F^\times \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) $v(xy) = v(x) + v(y)$;

(ii) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ se x, y e $x+y$ são diferentes de 0.

Convenção: É usual definir $v(0) = +\infty$.

Definição

Duas valuações v_1 e v_2 em F são equivalentes se existe $c > 0$ tal que $v_2 = c \cdot v_1$ (notação $v_2 \sim v_1$).

Valores absolutos e valuações

Teorema

Seja $c > 1$. Temos bijeções

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \substack{\text{valores absolutos} \\ \text{não}-\text{arquimedianos em } F} \right\} \Big/ \sim & \longleftrightarrow & \{\text{valuações em } F\}/\sim \\ |\cdot| & \longrightarrow & -\log|\cdot| \\ c^{-v(\cdot)} & \longleftarrow & v(\cdot) \end{array}$$

Valores absolutos e valuações

Teorema

Seja $c > 1$. Temos bijeções

$$\left\{ {\text{valores absolutos} \atop \text{não}-\text{arquimedianos em } F} \right\} \Big/ \sim \quad \longleftrightarrow \quad \{\text{valuações em } F\} / \sim$$
$$| \cdot | \quad \longrightarrow \quad -\log | \cdot |$$
$$c^{-v(\cdot)} \quad \longleftarrow \quad v(\cdot)$$

Teorema

Um valor absoluto $| \cdot |$ é não-arquimediano se, e somente se, existe $C > 0$ tal que $|n \cdot 1| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Valores absolutos e valuações

Teorema

Seja $c > 1$. Temos bijeções

$$\left\{\substack{\text{valores absolutos}\\ \text{não}-\text{arquimedianos em } F}\right\}\Big/\sim \quad \longleftrightarrow \quad \{\text{valuações em } F\}/\sim$$

$$|\cdot| \quad \longrightarrow \quad -\log|\cdot|$$

$$c^{-v(\cdot)} \quad \longleftarrow \quad v(\cdot)$$

Teorema

Um valor absoluto $|\cdot|$ é não-arquimediano se, e somente se, existe $C > 0$ tal que $|n \cdot 1| \leq C$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Proof.

$(\Longleftarrow)$
$|x+y|^n = \left|\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}\right| \leq \sum_{i=0}^{n} C|x|^i|y|^{n-i} \leq C \max\{|x|,|y|\}^n$
$\Longrightarrow |x+y| \leq \sqrt[n]{C} \max\{|x|,|y|\}$. Fazendo $n \to +\infty$ obtemos
$|x+y| \leq \max\{|x|,|y|\}$. $\square$

Valores absolutos e valuações

Corolário

Se $char(F) > 0$*, então todo valor absoluto em* F *é não-arquimediano.*

Valores absolutos e valuações

Corolário

Se $char(F) > 0$, *então todo valor absoluto em* F *é não-arquimediano.*

- **Exemplo trivial**: $|\cdot| : F \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definido por $|x| = 1$ se $x \neq 0$ é o **valor absoluto trivial** que corresponde à **valuação trivial** $v : F^{\times} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $v(x) = 0, \forall x \neq 0$.
- De agora em diante **consideramos apenas valores absolutos não-triviais.**

Valores absolutos e valuações

Corolário

Se $char(F) > 0$*, então todo valor absoluto em* F *é não-arquimediano.*

- **Exemplo trivial**: $|\cdot| : F \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definido por $|x| = 1$ se $x \neq 0$ é o **valor absoluto trivial** que corresponde à **valuação trivial** $v : F^{\times} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $v(x) = 0$, $\forall x \neq 0$.
- De agora em diante **consideramos apenas valores absolutos não-triviais.**
- O completamento $\widehat{F}$ de F com relação a um valor absoluto $|\cdot|$ é um corpo que é um espaço métrico completo com um valor absoluto que extende $|\cdot|$ e F é denso em $\widehat{F}$.

Valores absolutos e valuações

Corolário

Se $char(F) > 0$, então todo valor absoluto em F é não-arquimediano.

- **Exemplo trivial**: $|\cdot| : F \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definido por $|x| = 1$ se $x \neq 0$ é o **valor absoluto trivial** que corresponde à **valuação trivial** $v : F^{\times} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $v(x) = 0, \forall x \neq 0$.
- De agora em diante **consideramos apenas valores absolutos não-triviais.**
- O completamento $\widehat{F}$ de F com relação a um valor absoluto $|\cdot|$ é um corpo que é um espaço métrico completo com um valor absoluto que extende $|\cdot|$ e F é denso em $\widehat{F}$.
- **Exemplo**: Se R é um anel fatorial e $p \in R$ é um elemento irredutível e $a \in R \setminus \{0\}$, definimos a valuação

  $v_p(a) :=$expoente de p na decomposição de a em fatores irredutíveis.

Corolário

Se $char(F) > 0$, então todo valor absoluto em F é não-arquimediano.

- **Exemplo trivial**: $|\cdot| : F \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definido por $|x| = 1$ se $x \neq 0$ é o **valor absoluto trivial** que corresponde à **valuação trivial** $v : F^{\times} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $v(x) = 0$, $\forall x \neq 0$.
- De agora em diante **consideramos apenas valores absolutos não-triviais.**
- O completamento $\widehat{F}$ de F com relação a um valor absoluto $|\cdot|$ é um corpo que é um espaço métrico completo com um valor absoluto que extende $|\cdot|$ e F é denso em $\widehat{F}$.
- **Exemplo**: Se R é um anel fatorial e $p \in R$ é um elemento irredutível e $a \in R \setminus \{0\}$, definimos a valuação

  $v_p(a)$:=expoente de p na decomposição de a em fatores irredutíveis.

  Se $x = \frac{a}{b} \in K = Frac(R)$, definimos $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$.

Exemplos

- Se $K = \mathbb{Q}$, para cada número primo p, temos a valuação p-ádica v_p e definimos o valor absoluto p-ádico $|\cdot|_p$ por $|x|_p := p^{-v_p(x)}$.
- O completamento de $\mathbb{Q}$ com o valor absoluto $|\cdot|_p$ é chamado **corpo dos números p-ádicos** e denotado por $\mathbb{Q}_p$.

Exemplos

- Se $K = \mathbb{Q}$, para cada número primo p, temos a valuação p-ádica v_p e definimos o valor absoluto p-ádico $|\cdot|_p$ por $|x|_p := p^{-v_p(x)}$.
- O completamento de $\mathbb{Q}$ com o valor absoluto $|\cdot|_p$ é chamado **corpo dos números p-ádicos** e denotado por $\mathbb{Q}_p$.
- Se $K = \mathbb{F}_q(X)$, temos as valuações $v_{p(X)}$ para $p(X)$ um polinômio irredutível em $\mathbb{F}_q[X]$.
  - Observamos também que $K = Frac(\mathbb{F}_q[\frac{1}{X}])$ e obtemos a valuação $v_\infty := v_{1/X}$. Observe que $v_\infty(a/b) = \deg(b) - \deg(a)$, para $a, b \in \mathbb{F}_q[X]$.

Exemplos

- Se $K = \mathbb{Q}$, para cada número primo p, temos a valuação p-ádica v_p e definimos o valor absoluto p-ádico $|\cdot|_p$ por $|x|_p := p^{-v_p(x)}$.
- O completamento de $\mathbb{Q}$ com o valor absoluto $|\cdot|_p$ é chamado **corpo dos números p-ádicos** e denotado por $\mathbb{Q}_p$.
- Se $K = \mathbb{F}_q(X)$, temos as valuações $v_{p(X)}$ para $p(X)$ um polinômio irredutível em $\mathbb{F}_q[X]$.
  - Observamos também que $K = Frac(\mathbb{F}_q[\frac{1}{X}])$ e obtemos a valuação $v_\infty := v_{1/X}$. Observe que $v_\infty(a/b) = \deg(b) - \deg(a)$, para $a, b \in \mathbb{F}_q[X]$.

Teorema (Ostrowski)

Todo valor absoluto em $\mathbb{Q}$ é equivalente a um dos valores absolutos seguintes:

$$|\cdot|_{\mathbb{R}} \textit{ ou } |\cdot|_p \textit{ para } p \textit{ um número primo.}$$

Demonstração

Proof.

- Se $|\cdot|$ é um valor absoluto arquimediano em $\mathbb{Q}$ e n é um inteiro positivo,
$$|n| \leq |1| + \cdots + |1| = n.$$
Como $|\cdot|$ é arquimediano, existe a inteiro positivo com $|a| > 1$. Escrevemos $|a| = a^\alpha$ com $0 < \alpha \leq 1$. Se N é um inteiro positivo, escrevemos
$$N = x_0 + x_1 a + \cdots x_{k-1} a^{k-1},$$
com $0 \leq x_i \leq a - 1$ e $a^{k-1} \leq N < a^k$. Temos
$|N| \leq |x_0| + |x_1||a| + \cdots |x_{k-1}||a|^{k-1} \leq (a-1)(1 + a^\alpha + \cdots + a^{\alpha(k-1)})$
$$\leq \frac{a-1}{a^\alpha - 1}(a^{\alpha k} - 1) \leq\leq \frac{a-1}{a^\alpha - 1} a^{\alpha k} \leq \frac{(a-1)a^\alpha}{a^\alpha - 1} N^\alpha = CN^\alpha.$$

Demonstração

Proof.

- Se $|\cdot|$ é um valor absoluto arquimediano em $\mathbb{Q}$ e n é um inteiro positivo,
$$|n| \leq |1| + \cdots + |1| = n.$$
Como $|\cdot|$ é arquimediano, existe a inteiro positivo com $|a| > 1$. Escrevemos $|a| = a^{\alpha}$ com $0 < \alpha \leq 1$. Se N é um inteiro positivo, escrevemos
$$N = x_0 + x_1 a + \cdots x_{k-1} a^{k-1},$$
com $0 \leq x_i \leq a - 1$ e $a^{k-1} \leq N < a^k$. Temos
$|N| \leq |x_0| + |x_1||a| + \cdots |x_{k-1}||a|^{k-1} \leq (a-1)(1 + a^{\alpha} + \cdots + a^{\alpha(k-1)})$
$$\leq \frac{a-1}{a^{\alpha}-1}(a^{\alpha k} - 1) \leq\leq \frac{a-1}{a^{\alpha}-1} a^{\alpha k} \leq \frac{(a-1)a^{\alpha}}{a^{\alpha}-1} N^{\alpha} = CN^{\alpha}.$$
$|N^m| \leq CN^{\alpha m} \Longrightarrow |N| \leq \sqrt[m]{C} N^{\alpha}$. Fazendo $m \mapsto \infty$ obtemos $|N| \leq N^{\alpha}$.

$\square$

Demonstração

Proof.

Escreva $N = a^k - b$ com $0 < b \leq a^k - a^{k-1}$. Temos

$$|N| \geq |a|^k - |b| \geq a^{\alpha k} - (a^k - a^{k-1})^\alpha = C_1 a^{\alpha k} \geq C_1 N^\alpha.$$

Com um argumento análogo ao do slide anterior, provados que $|N| \geq N^\alpha$. Portanto $|N| = N^\alpha$ e obtemos $|\cdot| = |\cdot|_{\mathbb{R}}^\alpha$.

Demonstração

Proof.

Escreva $N = a^k - b$ com $0 < b \leq a^k - a^{k-1}$. Temos

$$|N| \geq |a|^k - |b| \geq a^{\alpha k} - (a^k - a^{k-1})^\alpha = C_1 a^{\alpha k} \geq C_1 N^\alpha.$$

Com um argumento análogo ao do slide anterior, provados que $|N| \geq N^\alpha$. Portanto $|N| = N^\alpha$ e obtemos $|\cdot| = |\cdot|_{\mathbb{R}}^\alpha$.

- Se $|\cdot|$ é não-arquimediano, então para n inteiro positivo, $|n| = |1 + \cdot + 1| \leq \max\{|1|, \cdots, |1|\} = 1$.
  Como $|\cdot$ é não-trivial, existe um inteiro positivo a tal que $|a| < 1$.
  Verificamos que para algum número primo p que divide a, $|p| < 1$.
  Verificamos que para qualquer outro número primo q, $|q| = 1$.
  Portanto $|\cdot| \sim |\cdot|_p$.

$\square$

Exemplos

Teorema

Toda valuação em $\mathbb{F}_q(X)$ é equivalente à uma das valuações seguintes:

$$v_\infty \text{ ou } v_{p(X)} \text{ com } p(X) \text{ um polinômio mônico irredutível em } \mathbb{F}_q[X].$$

Exemplos

Teorema

Toda valuação em $\mathbb{F}_q(X)$ é equivalente à uma das valuações seguintes:

$$v_\infty \text{ ou } v_{p(X)} \text{ com } p(X) \text{ um polinômio mônico irredutível em } \mathbb{F}_q[X].$$

Definição

Se v é uma valuação, $|\cdot| = c^{-v(\cdot)}$ com $c > 1$ e F_v é o completamento de F com o valor absoluto $|\cdot|$, definimos

$$\mathcal{O}_v := \{x \in F_v \mid v(x) \geq 0\} = \{x \in F_v \mid |x| \leq 1\};$$

$$\mathfrak{m}_v := \{x \in F_v \mid v(x) > 0\} = \{x \in F_v \mid |x| < 1\};$$

Exemplos

Teorema

Toda valuação em $\mathbb{F}_q(X)$ é equivalente à uma das valuações seguintes:

$$v_\infty \text{ ou } v_{p(X)} \text{ com } p(X) \text{ um polinômio mônico irredutível em } \mathbb{F}_q[X].$$

Definição

Se v é uma valuação, $|\cdot| = c^{-v(\cdot)}$ com $c > 1$ e F_v é o completamento de F com o valor absoluto $|\cdot|$, definimos

$$\mathcal{O}_v := \{x \in F_v \mid v(x) \geq 0\} = \{x \in F_v \mid |x| \leq 1\};$$

$$\mathfrak{m}_v := \{x \in F_v \mid v(x) > 0\} = \{x \in F_v \mid |x| < 1\};$$

O grupo de elementos invertíveis de $\mathcal{O}_v$:

$$\mathcal{O}_v^\times = \{x \in F_v \mid v(x) = 0\} = \{x \in F_v \mid |x| = 1\}.$$

Exemplos

Teorema

Toda valuação em $\mathbb{F}_q(X)$ é equivalente à uma das valuações seguintes:

$$v_\infty \text{ ou } v_{p(X)} \text{ com } p(X) \text{ um polinômio mônico irredutível em } \mathbb{F}_q[X].$$

Definição

Se v é uma valuação, $|\cdot| = c^{-v(\cdot)}$ com $c > 1$ e F_v é o completamento de F com o valor absoluto $|\cdot|$, definimos

$$\mathcal{O}_v := \{x \in F_v \mid v(x) \geq 0\} = \{x \in F_v \mid |x| \leq 1\};$$

$$\mathfrak{m}_v := \{x \in F_v \mid v(x) > 0\} = \{x \in F_v \mid |x| < 1\};$$

O grupo de elementos invertíveis de $\mathcal{O}_v$:

$$\mathcal{O}_v^\times = \{x \in F_v \mid v(x) = 0\} = \{x \in F_v \mid |x| = 1\}.$$

O corpo $k(v) := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ é chamado corpo residual.

Corpos de números algébricos

- Seja K uma extensão de $\mathbb{Q}$ de grau n. Denote por $\mathcal{O}_K$ o anel de inteiros algébricos de K.

Corpos de números algébricos

- Seja K uma extensão de $\mathbb{Q}$ de grau n. Denote por $\mathcal{O}_K$ o anel de inteiros algébricos de K.
- Seja $\mathfrak{p} \neq 0$ um ideal primo de $\mathcal{O}_K$. Dado $x \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$, escreva

$$x\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_l^{n_l},$$

com $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l$ ideais primos distintos e $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Definimos

$$v_{\mathfrak{p}}(x) := n_1.$$

Corpos de números algébricos

- Seja K uma extensão de $\mathbb{Q}$ de grau n. Denote por $\mathcal{O}_K$ o anel de inteiros algébricos de K.
- Seja $\mathfrak{p} \neq 0$ um ideal primo de $\mathcal{O}_K$. Dado $x \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$, escreva

$$x\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_l^{n_l},$$

com $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l$ ideais primos distintos e $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Definimos

$$v_{\mathfrak{p}}(x) := n_1.$$

Para $x = \frac{a}{b} \in K = Frac\mathcal{O}_K$, defina $v_{\mathfrak{p}}(x) := v_{\mathfrak{p}}(a) - v_{\mathfrak{p}}(b)$.

Corpos de números algébricos

- Seja K uma extensão de $\mathbb{Q}$ de grau n. Denote por $\mathcal{O}_K$ o anel de inteiros algébricos de K.
- Seja $\mathfrak{p} \neq 0$ um ideal primo de $\mathcal{O}_K$. Dado $x \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$, escreva

$$x\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_l^{n_l},$$

  com $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l$ ideais primos distintos e $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Definimos

$$v_{\mathfrak{p}}(x) := n_1.$$

  Para $x = \frac{a}{b} \in K = Frac\mathcal{O}_K$, defina $v_{\mathfrak{p}}(x) := v_{\mathfrak{p}}(a) - v_{\mathfrak{p}}(b)$.
- O **valor absoluto normalizado** é definido por $|\cdot|_{\mathfrak{p}} := q^{-v_{\mathfrak{p}}(\cdot)}$, onde $q = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$.

Corpos de números algébricos

- Seja K uma extensão de $\mathbb{Q}$ de grau n. Denote por $\mathcal{O}_K$ o anel de inteiros algébricos de K.
- Seja $\mathfrak{p} \neq 0$ um ideal primo de $\mathcal{O}_K$. Dado $x \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$, escreva

$$x\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_l^{n_l},$$

com $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_l$ ideais primos distintos e $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Definimos

$$v_{\mathfrak{p}}(x) := n_1.$$

Para $x = \frac{a}{b} \in K = Frac\mathcal{O}_K$, defina $v_{\mathfrak{p}}(x) := v_{\mathfrak{p}}(a) - v_{\mathfrak{p}}(b)$.

- O **valor absoluto normalizado** é definido por $|\cdot|_{\mathfrak{p}} := q^{-v_{\mathfrak{p}}(\cdot)}$, onde $q = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})$.
- As imersões reais $\sigma_1, \cdots, \sigma_r : K \hookrightarrow \mathbb{R}$ determinam valores absolutos

$$|\cdot|_{\sigma_i} := |\sigma_i(x)|_{\mathbb{R}}.$$

Corpos de números algébricos

- As imersões complexas $\sigma_{r+1}, \overline{\sigma_{r+1}}, \cdots \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+s}} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ determinam valores absolutos por

$$|\cdot|_{\sigma_{r+i}} := |\sigma_{r+i}(x)|_{\mathbb{C}},$$

$r + 2s = n.$

Corpos de números algébricos

- As imersões complexas $\sigma_{r+1}, \overline{\sigma_{r+1}}, \cdots \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+s}} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ determinam valores absolutos por

$$|\cdot|_{\sigma_{r+i}} := |\sigma_{r+i}(x)|_{\mathbb{C}},$$

  $r + 2s = n$.
- **Definimos** $n_\sigma = 1$ se σ é imersão real e $n_\sigma = 2$ se σ é imersão complexa.

Corpos de números algébricos

- As imersões complexas $\sigma_{r+1}, \overline{\sigma_{r+1}}, \cdots \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+s}} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ determinam valores absolutos por

$$|\cdot|_{\sigma_{r+i}} := |\sigma_{r+i}(x)|_{\mathbb{C}},$$

  $r + 2s = n$.
- **Definimos** $n_\sigma = 1$ se σ é imersão real e $n_\sigma = 2$ se σ é imersão complexa.
- Estes são, a menos de equivalência, todos os valores absolutos em K.

Corpos de números algébricos

- As imersões complexas $\sigma_{r+1}, \overline{\sigma_{r+1}}, \cdots \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+s}} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ determinam valores absolutos por

$$|\cdot|_{\sigma_{r+i}} := |\sigma_{r+i}(x)|_{\mathbb{C}},$$

  $r + 2s = n$.
- **Definimos** $n_\sigma = 1$ se σ é imersão real e $n_\sigma = 2$ se σ é imersão complexa.
- Estes são, a menos de equivalência, todos os valores absolutos em K.
- Se K é uma extensão separável de grau n de $\mathbb{F}_q(X)$, dado uma valuação v em $\mathbb{F}_q(X)$, ela tem no máximo n extensões à K. Referência:
  - Capítulo 1 de H. Stichtenoth - Algebraic function fields and codes.

Corpos de números algébricos

- As imersões complexas $\sigma_{r+1}, \overline{\sigma_{r+1}}, \cdots \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+s}} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ determinam valores absolutos por

$$|\cdot|_{\sigma_{r+i}} := |\sigma_{r+i}(x)|_{\mathbb{C}},$$

  $r + 2s = n$.
- **Definimos** $n_\sigma = 1$ se σ é imersão real e $n_\sigma = 2$ se σ é imersão complexa.
- Estes são, a menos de equivalência, todos os valores absolutos em K.
- Se K é uma extensão separável de grau n de $\mathbb{F}_q(X)$, dado uma valuação v em $\mathbb{F}_q(X)$, ela tem no máximo n extensões à K. Referência:
  - Capítulo 1 de H. Stichtenoth - Algebraic function fields and codes.
- Seja v uma valuação de K. Supomos que ela é normalizada, isso é $Im(v) = \mathbb{Z}$. Definimos o **valor absoluto normalizado** em F_v por $|\cdot|_v = q_v^{-v(\cdot)}$, onde $q_v = \#(\mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v)$.

Fórmula do produto

Teorema

Se K é uma extensão finita de $\mathbb{Q}$, então para $x \in K \setminus \{0\}$,

$$\prod_{\sigma|\infty} |x|_\sigma^{n_\sigma} \prod_{\mathfrak{p}} |x|_{\mathfrak{p}} = 1.$$

Se K é uma extensão finita de $\mathbb{F}_q(X)$, então para $x \in K \setminus \{0\}$,

$$\prod_{v} |x|_v = 1.$$

Fórmula do produto

Teorema

Se K é uma extensão finita de $\mathbb{Q}$, então para $x \in K \setminus \{0\}$,

$$\prod_{\sigma|\infty} |x|_\sigma^{n_\sigma} \prod_{\mathfrak{p}} |x|_{\mathfrak{p}} = 1.$$

Se K é uma extensão finita de $\mathbb{F}_q(X)$, então para $x \in K \setminus \{0\}$,

$$\prod_{v} |x|_v = 1.$$

Proof.

$$\prod_{\sigma|\infty} |x|_\sigma^{n_\sigma} = |Nr_{K/\mathbb{Q}}(x)|_{\mathbb{R}}$$

$$\prod_{w|v} |x|_w = |Nr_{K/F}(x)|_v,$$

$F = \mathbb{Q}$ ou $F = \mathbb{F}_q(X)$. $\square$

Adeles

- Seja F um corpo de númeors ou um corpo de funções em uma variável sobre $\mathbb{F}_q$.

Definição

O anel de **adeles** de F é definido por

$$\mathbb{A}_F := \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

Adeles

- Seja F um corpo de númeors ou um corpo de funções em uma variável sobre $\mathbb{F}_q$.

Definição

O anel de **adeles** de F é definido por

$$\mathbb{A}_F := \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- A topologia de $\mathbb{A}_F$ tem uma base constituída de conjuntos da forma $\prod_v U_v$, onde U_v é aberto em F_v e $U_v = \mathcal{O}_v$ para quase todo v.

Ideles

Definição

O grupo de **ideles** de F é o grupo de elementos invertíveis de $\mathbb{A}_F$:

$$\mathbb{A}_F^\times := \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v^\times \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v^\times, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

Ideles

Definição

O grupo de **ideles** de F é o grupo de elementos invertíveis de $\mathbb{A}_F$:

$$\mathbb{A}_F^\times := \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v^\times \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v^\times, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- A topologia de $\mathbb{A}_F^\times$ tem uma base constituída de conjuntos da forma $\prod_v U_v$, onde U_v é aberto em $F_v^\times$ e $U_v = \mathcal{O}_v^\times$ para quase todo v.

Ideles

Definição

O grupo de **ideles** de F é o grupo de elementos invertíveis de $\mathbb{A}_F$:

$$\mathbb{A}_F^\times := \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v^\times \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v^\times, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- A topologia de $\mathbb{A}_F^\times$ tem uma base constituída de conjuntos da forma $\prod_v U_v$, onde U_v é aberto em $F_v^\times$ e $U_v = \mathcal{O}_v^\times$ para quase todo v.
- **Observação**: A topologia de $\mathbb{A}_F^\times$ não é a topologia induzida de $\mathbb{A}_F$.

Ideles

Definição

O grupo de **ideles** de F é o grupo de elementos invertíveis de $\mathbb{A}_F$:

$$\mathbb{A}_F^\times := \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v^\times \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v^\times, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- A topologia de $\mathbb{A}_F^\times$ tem uma base constituída de conjuntos da forma $\prod_v U_v$, onde U_v é aberto em $F_v^\times$ e $U_v = \mathcal{O}_v^\times$ para quase todo v.
- **Observação**: A topologia de $\mathbb{A}_F^\times$ não é a topologia induzida de $\mathbb{A}_F$.

Definição

Se F é um corpo de números algébricos escrevemos

- $\mathbb{A}_F = \mathbb{A}_\infty \times \mathbb{A}_{fin}$, $\mathbb{A}_\infty := \prod_{\sigma|\infty} F_\sigma$,
- $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{fin}} := \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

Definição

Se F é um corpo de funções em uma variável sobre $\mathbb{F}_q$, definimos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_F} := \prod_v \mathcal{O}_v.$$

Adeles e ideles

Definição

Se F é um corpo de funções em uma variável sobre $\mathbb{F}_q$, definimos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_F} := \prod_v \mathcal{O}_v.$$

- Consideramos $F \subset \mathbb{A}_F$ e $F^\times \subset \mathbb{A}_F^\times$ por meio de

$$x \longmapsto (x_v),\ x_v = x, \text{ para todo } v.$$

Adeles e ideles

Definição

Se F é um corpo de funções em uma variável sobre $\mathbb{F}_q$, definimos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_F} := \prod_v \mathcal{O}_v.$$

- Consideramos $F \subset \mathbb{A}_F$ e $F^\times \subset \mathbb{A}_F^\times$ por meio de

$$x \longmapsto (x_v),\ x_v = x, \text{ para todo } v.$$

Teorema

F é discreto em $\mathbb{A}_F$ e $F^\times$ é discreto em $\mathbb{A}_F^\times$.

Adeles e ideles

Proof.

- Como $\mathbb{A}_F$ é um grupo topológico com a adição e F é um subgrupo, basta mostrar que existe uma vizinhança V da identidade em $\mathbb{A}_F$ tal que $V \cap F$ é discreto.
- Se F é um corpo de números algébricos, tome $V = \mathbb{A}_\infty \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{fin}}$. Pela descrição dos valores absolutos $|\cdot|_\mathfrak{p}$, segue que $F \cap V = \mathcal{O}_F$. É um resultado clássico em teoria algébrica dos números que a imagem de $\mathcal{O}_F$ em $\mathbb{A}_\infty$ é um reticulado e portanto é discreto. Referência:
  - Capítulo I, seção 5 de J. Neukirch - Algebraic Number Theory.
- Se F é uma extensão finita de $\mathbb{F}_q(X)$ e $V = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_F}$, pelos corolários 1.1.16 e 1.1.20 da referência abaixo, segue que $F \cap V$ é finito e portanto discreto. Referência:
  - Capítulo 1 de H. Stichtenoth - Algebraic function fields and codes.

□