Introdução às formas automórficas em grupos adélicos

Valdir José Pereira Júnior

IME - USP

03 de maio de 2024

Adeles e ideles

- Seja F um corpo de números ou uma extensão finita de $\mathbb{F}_q(X)$.

Definição

- O anel de **adeles** de F é definido por

$$\mathbb{A}_F := \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

Adeles e ideles

- Seja F um corpo de números ou uma extensão finita de $\mathbb{F}_q(X)$.

Definição

- O anel de **adeles** de F é definido por

$$\mathbb{A}_F := \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- O grupo de **ideles** de F é o grupo de elementos invertíveis de $\mathbb{A}_F$:

$$\mathbb{A}_F^\times = \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v^\times \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v^\times, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

Adeles e ideles

- Seja F um corpo de números ou uma extensão finita de $\mathbb{F}_q(X)$.

Definição

- O anel de **adeles** de F é definido por

$$\mathbb{A}_F := \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- O grupo de **ideles** de F é o grupo de elementos invertíveis de $\mathbb{A}_F$:

$$\mathbb{A}_F^\times = \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v^\times \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v^\times, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- Se F é um corpo de números algébricos escrevemos
  - $\mathbb{A}_F = \mathbb{A}_\infty \times \mathbb{A}_{fin}$, onde $\mathbb{A}_\infty := \prod_{\sigma|\infty} F_\sigma$. **Definimos** $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{fin}} := \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

Adeles e ideles

- Seja F um corpo de números ou uma extensão finita de $\mathbb{F}_q(X)$.

Definição

- O anel de **adeles** de F é definido por

$$\mathbb{A}_F := \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- O grupo de **ideles** de F é o grupo de elementos invertíveis de $\mathbb{A}_F$:

$$\mathbb{A}_F^\times = \left\{ (x_v) \in \prod_v F_v^\times \;\middle|\; x_v \in \mathcal{O}_v^\times, \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- Se F é um corpo de números algébricos escrevemos
  - $\mathbb{A}_F = \mathbb{A}_\infty \times \mathbb{A}_{fin}$, onde $\mathbb{A}_\infty := \prod_{\sigma|\infty} F_\sigma$. **Definimos** $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_{fin}} := \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.
- Se F é um corpo de funções em uma variável sobre $\mathbb{F}_q$, definimos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_F} := \prod_v \mathcal{O}_v.$$

Teoria de corpos de classe

- Seja F um corpo de números. Denote por $\mathcal{I}_F$ o grupo de ideais fracionários e por $\mathcal{P}_F$ o grupo de ideais fracionários principais.
- $\mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$ é um grupo finito.

Teoria de corpos de classe

- Seja F um corpo de números. Denote por $\mathcal{I}_F$ o grupo de ideais fracionários e por $\mathcal{P}_F$ o grupo de ideais fracionários principais.
- $\mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$ é um grupo finito.
- $F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times / \left(\mathbb{A}_\infty^\times \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{fin}}^\times\right) \simeq \mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$.

Teoria de corpos de classe

- Seja F um corpo de números. Denote por $\mathcal{I}_F$ o grupo de ideais fracionários e por $\mathcal{P}_F$ o grupo de ideais fracionários principais.
- $\mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$ é um grupo finito.
- $F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times / \left(\mathbb{A}_\infty^\times \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{fin}}^\times\right) \simeq \mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$.

Teoria de corpos de classe

- Seja F um corpo de números. Denote por $\mathcal{I}_F$ o grupo de ideais fracionários e por $\mathcal{P}_F$ o grupo de ideais fracionários principais.
- $\mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$ é um grupo finito.
- $F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times / \left(\mathbb{A}_\infty^\times \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{fin}}^\times\right) \simeq \mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$.

Teorema (Takagi, Artin)

Existe um mapa canônico $\mathbb{A}_F^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$ *dado por*

$$(\cdots, x_v, \cdots) \longmapsto \prod_v (x_v, F_v).$$

Teoria de corpos de classe

- Seja F um corpo de números. Denote por $\mathcal{I}_F$ o grupo de ideais fracionários e por $\mathcal{P}_F$ o grupo de ideais fracionários principais.
- $\mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$ é um grupo finito.
- $F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times / \left(\mathbb{A}_\infty^\times \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{fin}}^\times\right) \simeq \mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$.

Teorema (Takagi, Artin)

Existe um mapa canônico $\mathbb{A}_F^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$ *dado por*

$$(\cdots, x_v, \cdots) \longmapsto \prod_v (x_v, F_v). \quad \text{“\textit{Essencialmente} } (x_\mathfrak{p}, F_\mathfrak{p}) = \mathrm{Frob}_\mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})}.\text{”}$$

Teoria de corpos de classe

- Seja F um corpo de números. Denote por $\mathcal{I}_F$ o grupo de ideais fracionários e por $\mathcal{P}_F$ o grupo de ideais fracionários principais.
- $\mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$ é um grupo finito.
- $F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times / \left(\mathbb{A}_\infty^\times \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{fin}}^\times\right) \simeq \mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$.

Teorema (Takagi, Artin)

Existe um mapa canônico $\mathbb{A}_F^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$ *dado por*

$(\cdots, x_v, \cdots) \longmapsto \prod_v (x_v, F_v)$. *"Essencialmente* $(x_\mathfrak{p}, F_\mathfrak{p}) = \mathrm{Frob}_\mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})}$*."*

- *Se* F *é um corpo de números e* $\mathfrak{D}$ *é a componente conexa de* 1 *em* $F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times$*, então o mapa induz um isomorfismo*

$$F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times/\mathfrak{D} \simeq \mathrm{Gal}(F^{ab}/F).$$

Teoria de corpos de classe

- Seja F um corpo de números. Denote por $\mathcal{I}_F$ o grupo de ideais fracionários e por $\mathcal{P}_F$ o grupo de ideais fracionários principais.
- $\mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$ é um grupo finito.
- $F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times / \left(\mathbb{A}_\infty^\times \times \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{fin}}^\times\right) \simeq \mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$.

Teorema (Takagi, Artin)

Existe um mapa canônico $\mathbb{A}_F^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$ dado por

$(\cdots, x_v, \cdots) \longmapsto \prod_v (x_v, F_v)$. *"Essencialmente $(x_\mathfrak{p}, F_\mathfrak{p}) = \mathrm{Frob}_\mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})}$."*

- *Se F é um corpo de números e $\mathfrak{D}$ é a componente conexa de 1 em $F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times$, então o mapa induz um isomorfismo*
$$F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times/\mathfrak{D} \simeq \mathrm{Gal}(F^{ab}/F).$$
- *Se F é um corpo de funções, temos uma imersão com imagem densa:*
$$F^\times \setminus \mathbb{A}_F^\times/\mathcal{O}_{\mathbb{A}_F}^\times \hookrightarrow \mathrm{Gal}(F^{ab}/F).$$

Leis de reciprocidade

- Seja F um corpo de números contendo as raízes n-ésimas da unidade. O **Símbolo de Hilbert**

$$\left(\frac{\cdot,\cdot}{v}\right) : F_v^\times \times F_v^\times \longrightarrow \mu_n.$$

Leis de reciprocidade

- Seja F um corpo de números contendo as raízes n-ésimas da unidade. O **Símbolo de Hilbert**

$$\left(\frac{\cdot,\cdot}{v}\right) : F_v^\times \times F_v^\times \longrightarrow \mu_n.$$

é definido por

$$(a, F_v(\sqrt[n]{b})|F_v)\sqrt[n]{b} = \left(\frac{a,b}{v}\right)\sqrt[n]{b}.$$

Leis de reciprocidade

- Seja F um corpo de números contendo as raízes n-ésimas da unidade. O **Símbolo de Hilbert**

$$\left(\frac{\cdot,\cdot}{v}\right): F_v^\times \times F_v^\times \longrightarrow \mu_n.$$

é definido por

$$(a, F_v(\sqrt[n]{b})|F_v)\sqrt[n]{b} = \left(\frac{a,b}{v}\right)\sqrt[n]{b}.$$

Teorema

Se $a, b \in F^\times$, *então*

$$\prod_v \left(\frac{a,b}{v}\right) = 1.$$

Tese de Tate

- Seja F um corpo de números e defina

$$\zeta_F(s) := \prod_{\mathfrak{p}} (1 - Nr(\mathfrak{p})^{-s})^{-1};$$

Tese de Tate

- Seja F um corpo de números e defina

$$\zeta_F(s) := \prod_{\mathfrak{p}} (1 - Nr(\mathfrak{p})^{-s})^{-1};$$

$$G_1(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \quad G_2(s) := (2\pi)^{1-s}\Gamma(s),$$

$$\Lambda_F(s) := G_1(s)^{r_1} G_2(s)^{r_2} \zeta_F(s).$$

Tese de Tate

- Seja F um corpo de números e defina
$$\zeta_F(s) := \prod_{\mathfrak{p}} (1 - Nr(\mathfrak{p})^{-s})^{-1};$$
$$G_1(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \quad G_2(s) := (2\pi)^{1-s}\Gamma(s),$$
$$\Lambda_F(s) := G_1(s)^{r_1} G_2(s)^{r_2} \zeta_F(s).$$
- Para $x = (x_v) \in \mathbb{A}_F^\times$, definimos
$$|x| := \prod_v |x_v|_v.$$
- Considere as funções complexas em $\mathbb{A}_F$ da forma $\Phi = \prod_v \Phi_v$, onde
  - $\Phi_v \in S(F_v)$ se v é arquimediano;

Tese de Tate

- Seja F um corpo de números e defina

$$\zeta_F(s) := \prod_{\mathfrak{p}} (1 - Nr(\mathfrak{p})^{-s})^{-1};$$

$$G_1(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \quad G_2(s) := (2\pi)^{1-s}\Gamma(s),$$

$$\Lambda_F(s) := G_1(s)^{r_1} G_2(s)^{r_2} \zeta_F(s).$$

- Para $x = (x_v) \in \mathbb{A}_F^\times$, definimos

$$|x| := \prod_v |x_v|_v.$$

- Considere as funções complexas em $\mathbb{A}_F$ da forma $\Phi = \prod_v \Phi_v$, onde
  - $\Phi_v \in S(F_v)$ se v é arquimediano;
  - Φ_v é localmente constante e de suporte compacto se v é não-arquimediano;
  - Para quase todo v, $\Phi_v = \mathrm{Char}_{\mathcal{O}_v}$.

Tese de Tate

- **Integral de Tate**:

$$Z(\Phi, s) := \int_{\mathbb{A}_F^\times} \Phi(x)|x|^s dx, \quad Re(s) > 1.$$

Tese de Tate

- **Integral de Tate**:

$$Z(\Phi, s) := \int_{\mathbb{A}_F^\times} \Phi(x)|x|^s dx, \quad Re(s) > 1.$$

- **Transformada de Fourier**:

$$\widehat{\Phi}(y) := \int_{\mathbb{A}_F} \Phi(x)\overline{\chi(xy)}dx,$$

onde $\chi : F \setminus \mathbb{A}_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ é um caracter fixado ($|\chi(y)| = 1$, $\forall y \in \mathbb{A}_F$).

Tese de Tate

- **Integral de Tate**:

$$Z(\Phi, s) := \int_{\mathbb{A}_F^\times} \Phi(x)|x|^s dx, \quad Re(s) > 1.$$

- **Transformada de Fourier**:

$$\widehat{\Phi}(y) := \int_{\mathbb{A}_F} \Phi(x)\overline{\chi(xy)}dx,$$

onde $\chi : F \setminus \mathbb{A}_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ é um caracter fixado ($|\chi(y)| = 1$, $\forall y \in \mathbb{A}_F$).

Teorema

$$\Lambda_F(s) = |D|^{\frac{1}{2}-s}\Lambda_F(1-s).$$

Tese de Tate

- **Integral de Tate**:

$$Z(\Phi, s) := \int_{\mathbb{A}_F^\times} \Phi(x)|x|^s dx, \quad Re(s) > 1.$$

- **Transformada de Fourier**:

$$\widehat{\Phi}(y) := \int_{\mathbb{A}_F} \Phi(x)\overline{\chi(xy)}dx,$$

onde $\chi : F \setminus \mathbb{A}_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ é um caracter fixado ($|\chi(y)| = 1$, $\forall y \in \mathbb{A}_F$).

Teorema

$$\Lambda_F(s) = |D|^{\frac{1}{2}-s}\Lambda_F(1-s).$$

$$Z(\Phi, s) = Z(\widehat{\Phi}, 1-s).$$

Parte 2

Formas Automórficas

Grupos adélicos

Definição

O grupo $GL_n(\mathbb{A}_F)$ das matrizes invertíveis $n \times n$ com entradas em $\mathbb{A}_F$:

$$GL_n(\mathbb{A}_F) = \left\{ (g_v) \in \prod_v GL_n(F_v) \;\middle|\; g_v \in GL_n(\mathcal{O}_v), \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- A topologia de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ tem uma base constituída de conjuntos da forma $\prod_v U_v$, onde U_v é aberto em $GL_n(F_v)$ e $U_v = GL_n(\mathcal{O}_v)$ para quase todo v.

Grupos adélicos

Definição

O grupo $GL_n(\mathbb{A}_F)$ das matrizes invertíveis $n \times n$ com entradas em $\mathbb{A}_F$:

$$GL_n(\mathbb{A}_F) = \left\{ (g_v) \in \prod_v GL_n(F_v) \;\middle|\; g_v \in GL_n(\mathcal{O}_v), \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- A topologia de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ tem uma base constituída de conjuntos da forma $\prod_v U_v$, onde U_v é aberto em $GL_n(F_v)$ e $U_v = GL_n(\mathcal{O}_v)$ para quase todo v.
- **Exemplo**: $\mathbb{A}_F^\times = GL_1(\mathbb{A}_F)$.

Grupos adélicos

Definição

O grupo $GL_n(\mathbb{A}_F)$ das matrizes invertíveis $n \times n$ com entradas em $\mathbb{A}_F$:

$$GL_n(\mathbb{A}_F) = \left\{ (g_v) \in \prod_v GL_n(F_v) \;\middle|\; g_v \in GL_n(\mathcal{O}_v), \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- A topologia de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ tem uma base constituída de conjuntos da forma $\prod_v U_v$, onde U_v é aberto em $GL_n(F_v)$ e $U_v = GL_n(\mathcal{O}_v)$ para quase todo v.
- **Exemplo**: $\mathbb{A}_F^\times = GL_1(\mathbb{A}_F)$.

Grupos adélicos

Definição

O grupo $GL_n(\mathbb{A}_F)$ das matrizes invertíveis $n \times n$ com entradas em $\mathbb{A}_F$:

$$GL_n(\mathbb{A}_F) = \left\{ (g_v) \in \prod_v GL_n(F_v) \;\middle|\; g_v \in GL_n(\mathcal{O}_v), \text{ para quase todo } v \right\}.$$

- A topologia de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ tem uma base constituída de conjuntos da forma $\prod_v U_v$, onde U_v é aberto em $GL_n(F_v)$ e $U_v = GL_n(\mathcal{O}_v)$ para quase todo v.
- **Exemplo**: $\mathbb{A}_F^\times = GL_1(\mathbb{A}_F)$.

Teorema

$GL_n(F)$ é discreto em $GL_n(\mathbb{A}_F)$.

Proof.

- Considere

$$Y(\mathbb{A}_F) := \{x = (x_{ij}, y) \in \mathbb{A}_F^{n^2+1} \mid \det(x_{ij})y = 1\},$$

o qual é um subconjunto fechado de $\mathbb{A}_F^{n^2+1}$ e

$$Y(F) := \{x = (x_{ij}, y) \in F^{n^2+1} \mid \det(x_{ij})y = 1\}$$

é um subconjunto discreto.

Proof.

- Considere

$$Y(\mathbb{A}_F) := \{x = (x_{ij}, y) \in \mathbb{A}_F^{n^2+1} \mid \det(x_{ij})y = 1\},$$

o qual é um subconjunto fechado de $\mathbb{A}_F^{n^2+1}$ e

$$Y(F) := \{x = (x_{ij}, y) \in F^{n^2+1} \mid \det(x_{ij})y = 1\}$$

é um subconjunto discreto.

- O mapa $g \mapsto (g_{ij}, \det(g)^{-1})$ é um homeomorfismo de $GL_n(\mathbb{A}_F)$ com $Y(\mathbb{A}_F)$.

$\square$

Notações

- Se $|\cdot|_v$ é um valor absoluto com $F_v = \mathbb{R}$, defina

$$K_v = O(n) := \{x \in GL_n(\mathbb{R}) \mid x \cdot x^t = id\}.$$

Notações

- Se $|\cdot|_v$ é um valor absoluto com $F_v = \mathbb{R}$, defina

$$K_v = O(n) := \{x \in GL_n(\mathbb{R}) \mid x \cdot x^t = id\}.$$

- Se $|\cdot|_v$ é um valor absoluto com $F_v = \mathbb{C}$, defina

$$K_v = U(n) := \{x \in GL_n(\mathbb{C}) \mid x \cdot \overline{x}^t = id\}.$$

Notações

- Se $|\cdot|_v$ é um valor absoluto com $F_v = \mathbb{R}$, defina
$$K_v = O(n) := \{x \in GL_n(\mathbb{R}) \mid x \cdot x^t = id\}.$$
- Se $|\cdot|_v$ é um valor absoluto com $F_v = \mathbb{C}$, defina
$$K_v = U(n) := \{x \in GL_n(\mathbb{C}) \mid x \cdot \overline{x}^t = id\}.$$
- Se $|\cdot|_v$ é um valor absoluto não-arquimediano, defina $K_v := GL_n(\mathcal{O}_v)$.

Notações

- Se $|\cdot|_v$ é um valor absoluto com $F_v = \mathbb{R}$, defina

$$K_v = O(n) := \{x \in GL_n(\mathbb{R}) \mid x \cdot x^t = id\}.$$

- Se $|\cdot|_v$ é um valor absoluto com $F_v = \mathbb{C}$, defina

$$K_v = U(n) := \{x \in GL_n(\mathbb{C}) \mid x \cdot \overline{x}^t = id\}.$$

- Se $|\cdot|_v$ é um valor absoluto não-arquimediano, defina $K_v := GL_n(\mathcal{O}_v)$.
- $K_\infty := \prod_{v|\infty} K_v$, $K_f := \prod_{v \text{ finito}} K_v$.
- $K := K_\infty K_f$ é subgrupo compacto maximal de $GL_n(\mathbb{A}_F)$.
- Defina $G_\infty := \prod_{v|\infty} GL_n(F_v)$ e $G_f := GL_n(\mathbb{A}_{fin})$.

Teorema (A. Borel - 1963)

Seja F um corpo de números. Defina
$c(GL_n) := \#(GL_n(F) \setminus GL_n(\mathbb{A}_F)/G_\infty K_f)$.

Teorema (A. Borel - 1963)

Seja F um corpo de números. Defina $c(GL_n) := \#(GL_n(F) \setminus GL_n(\mathbb{A}_F)/G_\infty K_f)$. *Temos*

$$c(GL_n) = h_F.$$

Grupos adélicos

Teorema (A. Borel - 1963)

Seja F um corpo de números. Defina
$c(GL_n) := \#(GL_n(F) \setminus GL_n(\mathbb{A}_F)/G_\infty K_f)$. *Temos*

$$c(GL_n) = h_F.$$

- **Exemplo**: Considere $F = \mathbb{Q}$. Pelo teorema, podemos escrever $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = GL_n(\mathbb{Q})GL_n(\mathbb{R})K_f$.

Grupos adélicos

Teorema (A. Borel - 1963)

Seja F um corpo de números. Defina $c(GL_n) := \#(GL_n(F) \setminus GL_n(\mathbb{A}_F)/G_\infty K_f)$. *Temos*

$$c(GL_n) = h_F.$$

- **Exemplo**: Considere $F = \mathbb{Q}$. Pelo teorema, podemos escrever $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = GL_n(\mathbb{Q})GL_n(\mathbb{R})K_f$. Podemos também escrever $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = GL_n(\mathbb{Q})GL_n^+(\mathbb{R})K_f$

Teorema (A. Borel - 1963)

Seja F um corpo de números. Defina $c(GL_n) := \#(GL_n(F) \setminus GL_n(\mathbb{A}_F)/G_\infty K_f)$. *Temos*

$$c(GL_n) = h_F.$$

- **Exemplo**: Considere $F = \mathbb{Q}$. Pelo teorema, podemos escrever $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = GL_n(\mathbb{Q})GL_n(\mathbb{R})K_f$. Podemos também escrever $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = GL_n(\mathbb{Q})GL_n^+(\mathbb{R})K_f$
- Seja $\Gamma := GL_n^+(\mathbb{Z}) = GL_n(\mathbb{Q}) \cap (GL_n^+(\mathbb{R})K_f)$.

Teorema (A. Borel - 1963)

Seja F um corpo de números. Defina $c(GL_n) := \#(GL_n(F) \setminus GL_n(\mathbb{A}_F)/G_\infty K_f)$*. Temos*

$$c(GL_n) = h_F.$$

- **Exemplo**: Considere $F = \mathbb{Q}$. Pelo teorema, podemos escrever $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = GL_n(\mathbb{Q})GL_n(\mathbb{R})K_f$. Podemos também escrever $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = GL_n(\mathbb{Q})GL_n^+(\mathbb{R})K_f$
- Seja $\Gamma := GL_n^+(\mathbb{Z}) = GL_n(\mathbb{Q}) \cap (GL_n^+(\mathbb{R})K_f)$.
- Temos $\Gamma \setminus GL_n^+(\mathbb{R}) \simeq GL_n(\mathbb{Q}) \setminus GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/K_f$.

Grupos adélicos

Teorema (A. Borel - 1963)

Seja F um corpo de números. Defina $c(GL_n) := \#(GL_n(F) \setminus GL_n(\mathbb{A}_F)/G_\infty K_f)$. *Temos*

$$c(GL_n) = h_F.$$

- **Exemplo**: Considere $F = \mathbb{Q}$. Pelo teorema, podemos escrever $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = GL_n(\mathbb{Q})GL_n(\mathbb{R})K_f$. Podemos também escrever $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = GL_n(\mathbb{Q})GL_n^+(\mathbb{R})K_f$
- Seja $\Gamma := GL_n^+(\mathbb{Z}) = GL_n(\mathbb{Q}) \cap (GL_n^+(\mathbb{R})K_f)$.
- Temos $\Gamma \setminus GL_n^+(\mathbb{R}) \simeq GL_n(\mathbb{Q}) \setminus GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/K_f$.
- Denote por $Z(\mathbb{R})$ as matrizes diagonais em $GL_n^+(\mathbb{R})$ e por $Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ as matrizes diagonais de $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$.
- $Z(\mathbb{R})\Gamma \setminus GL_n^+(\mathbb{R})/K_\infty^+ \simeq Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})GL_n(\mathbb{Q}) \setminus GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/K$.

Formas modulares

- Seja $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$. Ação de $GL_2^+(\mathbb{R})$ em $\mathbb{H}$:

$$\gamma z := \tfrac{az+b}{cz+d}, \text{ para } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}).$$

Formas modulares

- Seja $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$. Ação de $GL_2^+(\mathbb{R})$ em $\mathbb{H}$:

$$\gamma z := \frac{az+b}{cz+d}, \text{ para } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}).$$

- Uma **forma modular** $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ de **peso** k, satisfaz:
  (i) f é holomorfa;
  (ii) Para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, temos

$$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z).$$

Formas modulares

- Seja $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$. Ação de $GL_2^+(\mathbb{R})$ em $\mathbb{H}$:
$$\gamma z := \tfrac{az+b}{cz+d}, \text{ para } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}).$$
- Uma **forma modular** $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ de **peso** k, satisfaz:
  (i) f é holomorfa;
  (ii) Para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, temos
$$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z).$$
- A ação de $GL_2^+(\mathbb{R})$ é transitiva e o estabilizador de $i \in \mathbb{H}$ é $Z(\mathbb{R})K_\infty^+$. Portanto
$$GL_2^+(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R})K_\infty^+ \simeq \mathbb{H}.$$

Formas modulares

- Defina $j(g;z) = \det(g)^{-1/2}(cz+d)$ para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$ e $z \in \mathbb{H}$.

Formas modulares

- Defina $j(g;z) = \det(g)^{-1/2}(cz+d)$ para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$ e $z \in \mathbb{H}$.
- Para f forma modular de peso m e $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$, defina $\varphi(g) := j(g;i)^{-m} f(g \cdot i)$.

Formas modulares

- Defina $j(g;z) = \det(g)^{-1/2}(cz+d)$ para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$ e $z \in \mathbb{H}$.
- Para f forma modular de peso m e $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$, defina $\varphi(g) := j(g;i)^{-m} f(g \cdot i)$. φ satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ e $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$;

- Defina $j(g;z) = \det(g)^{-1/2}(cz+d)$ para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$ e $z \in \mathbb{H}$.
- Para f forma modular de peso m e $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$, defina $\varphi(g) := j(g;i)^{-m} f(g \cdot i)$. φ satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ e $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$;
  (ii) $\varphi(zg) = \varphi(g)$ para $z \in Z(\mathbb{R})$;

Formas modulares

- Defina $j(g; z) = \det(g)^{-1/2}(cz + d)$ para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$ e $z \in \mathbb{H}$.
- Para f forma modular de peso m e $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$, defina $\varphi(g) := j(g; i)^{-m} f(g \cdot i)$. φ satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ e $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$;
  (ii) $\varphi(zg) = \varphi(g)$ para $z \in Z(\mathbb{R})$;
  (iii) $\varphi(gk_\theta) = e^{im\theta}\varphi(g)$ para
  $$k_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in K_\infty^+$$

Formas modulares

- Defina $j(g; z) = \det(g)^{-1/2}(cz + d)$ para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$ e $z \in \mathbb{H}$.
- Para f forma modular de peso m e $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$, defina $\varphi(g) := j(g; i)^{-m} f(g \cdot i)$. φ satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ e $g \in GL_2^+(\mathbb{R})$;
  (ii) $\varphi(zg) = \varphi(g)$ para $z \in Z(\mathbb{R})$;
  (iii) $\varphi(gk_\theta) = e^{im\theta}\varphi(g)$ para
  $$k_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in K_\infty^+$$
- Portanto φ define uma função em $SL_2(\mathbb{Z}) \setminus GL_2^+(\mathbb{R}) \simeq GL_2(\mathbb{Q}) \setminus GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/K_f$.

Definições

- Seja $\mathfrak{g}_\infty$ a álgebra de Lie de G_∞. Para $X \in \mathfrak{g}_\infty$ e $f : G_\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função C^∞, definimos

$$Xf(g) := \frac{d}{dt} f(g \exp(tX))|_{t=0}$$

Definições

- Seja $\mathfrak{g}_\infty$ a álgebra de Lie de G_∞. Para $X \in \mathfrak{g}_\infty$ e $f : G_\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função C^∞, definimos

$$Xf(g) := \frac{d}{dt} f(g \exp(tX))|_{t=0}$$

- Desta forma identificamos a álgebra universal $U(\mathfrak{g}_\infty)$ com os operadores diferenciais em G_∞ que comutam com multiplicação à direita.

Definições

- Seja $\mathfrak{g}_\infty$ a álgebra de Lie de G_∞. Para $X \in \mathfrak{g}_\infty$ e $f : G_\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função C^∞, definimos

$$Xf(g) := \frac{d}{dt} f(g \exp(tX))|_{t=0}$$

- Desta forma identificamos a álgebra universal $U(\mathfrak{g}_\infty)$ com os operadores diferenciais em G_∞ que comutam com multiplicação à direita.
- O centro $\mathcal{Z}$ de $U(\mathfrak{g}_\infty)$ se identifica com os operadores diferenciais em G_∞ que comutam com multiplicação à direita e à esquerda.

Definições

- Seja $\mathfrak{g}_\infty$ a álgebra de Lie de G_∞. Para $X \in \mathfrak{g}_\infty$ e $f : G_\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função C^∞, definimos

$$Xf(g) := \frac{d}{dt} f(g \exp(tX))|_{t=0}$$

- Desta forma identificamos a álgebra universal $U(\mathfrak{g}_\infty)$ com os operadores diferenciais em G_∞ que comutam com multiplicação à direita.
- O centro $\mathcal{Z}$ de $U(\mathfrak{g}_\infty)$ se identifica com os operadores diferenciais em G_∞ que comutam com multiplicação à direita e à esquerda.
- Para $g = (g_{ij}) \in GL_n(F_v)$, defina $||g||_v := \max\{|g_{ij}|_v, |(g^{-1})_{ij}|_v,\ i,j = 1, \cdots n\}$.

Definições

- Seja $\mathfrak{g}_\infty$ a álgebra de Lie de G_∞. Para $X \in \mathfrak{g}_\infty$ e $f : G_\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função C^∞, definimos
$$Xf(g) := \frac{d}{dt} f(g \exp(tX))|_{t=0}$$
- Desta forma identificamos a álgebra universal $U(\mathfrak{g}_\infty)$ com os operadores diferenciais em G_∞ que comutam com multiplicação à direita.
- O centro $\mathcal{Z}$ de $U(\mathfrak{g}_\infty)$ se identifica com os operadores diferenciais em G_∞ que comutam com multiplicação à direita e à esquerda.
- Para $g = (g_{ij}) \in GL_n(F_v)$, defina $||g||_v := \max\{|g_{ij}|_v, |(g^{-1})_{ij}|_v,\ i,j = 1, \cdots n\}$. Para $g = (g_v)_v \in GL_n(\mathbb{A}_F)$, defina
$$||g|| := \prod_v ||g_v||_v.$$

Formas automórficas

- **Convenção**: $G = GL_n$.
- Escrevemos $G(\mathbb{A}_F) = G_\infty \cdot G_f$ e para $g \in G(\mathbb{A}_F)$, escrevemos $g = (g_\infty, g_f)$. Seja $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função, $\varphi(g) = \varphi(g_\infty, g_f)$. Dizemos que φ é **suave** se φ é C^∞ nas coordenadas arquimedianas g_∞ e localmente constante em g_f.

Formas automórficas

- **Convenção**: $G = GL_n$.
- Escrevemos $G(\mathbb{A}_F) = G_\infty \cdot G_f$ e para $g \in G(\mathbb{A}_F)$, escrevemos $g = (g_\infty, g_f)$. Seja $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função, $\varphi(g) = \varphi(g_\infty, g_f)$. Dizemos que φ é **suave** se φ é C^∞ nas coordenadas arquimedianas g_∞ e localmente constante em g_f.

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** (K-finita) se satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;

Formas automórficas

- **Convenção**: $G = GL_n$.
- Escrevemos $G(\mathbb{A}_F) = G_\infty \cdot G_f$ e para $g \in G(\mathbb{A}_F)$, escrevemos $g = (g_\infty, g_f)$. Seja $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função, $\varphi(g) = \varphi(g_\infty, g_f)$. Dizemos que φ é **suave** se φ é C^∞ nas coordenadas arquimedianas g_∞ e localmente constante em g_f.

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** (K-finita) se satisfaz:
  - (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;
  - (ii) O espaço $\langle \varphi(gk) | k \in K \rangle$ tem dimensão finita;

Formas automórficas

- **Convenção**: $G = GL_n$.
- Escrevemos $G(\mathbb{A}_F) = G_\infty \cdot G_f$ e para $g \in G(\mathbb{A}_F)$, escrevemos $g = (g_\infty, g_f)$. Seja $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função, $\varphi(g) = \varphi(g_\infty, g_f)$. Dizemos que φ é **suave** se φ é C^∞ nas coordenadas arquimedianas g_∞ e localmente constante em g_f.

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** (K-finita) se satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;
  (ii) O espaço $\langle \varphi(gk) | k \in K \rangle$ tem dimensão finita;
  (iii) O espaço $\langle X\varphi(g) | X \in \mathcal{Z} \rangle$ tem dimensão finita;

Formas automórficas

- **Convenção**: $G = GL_n$.
- Escrevemos $G(\mathbb{A}_F) = G_\infty \cdot G_f$ e para $g \in G(\mathbb{A}_F)$, escrevemos $g = (g_\infty, g_f)$. Seja $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função, $\varphi(g) = \varphi(g_\infty, g_f)$. Dizemos que φ é **suave** se φ é C^∞ nas coordenadas arquimedianas g_∞ e localmente constante em g_f.

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** (K-finita) se satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;
  (ii) O espaço $\langle \varphi(gk) | k \in K \rangle$ tem dimensão finita;
  (iii) O espaço $\langle X\varphi(g) | X \in \mathcal{Z} \rangle$ tem dimensão finita;
  (iv) Existe um inteiro positivo r tal que

$$|\varphi(g)| \leq C||g||^r.$$

Formas automórficas

- **Convenção**: $G = GL_n$.
- Escrevemos $G(\mathbb{A}_F) = G_\infty \cdot G_f$ e para $g \in G(\mathbb{A}_F)$, escrevemos $g = (g_\infty, g_f)$. Seja $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função, $\varphi(g) = \varphi(g_\infty, g_f)$. Dizemos que φ é **suave** se φ é C^∞ nas coordenadas arquimedianas g_∞ e localmente constante em g_f.

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** (K-finita) se satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;
  (ii) O espaço $\langle \varphi(gk) | k \in K \rangle$ tem dimensão finita;
  (iii) O espaço $\langle X\varphi(g) | X \in \mathcal{Z} \rangle$ tem dimensão finita;
  (iv) Existe um inteiro positivo r tal que

$$|\varphi(g)| \leq C||g||^r.$$

Notação: $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G(F) \setminus G(\mathbb{A}_F))$ denota o espaço das formas automórficas.

Formas automórficas suaves

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** suave se satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;

Formas automórficas suaves

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** suave se satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;
  (ii) O espaço $\langle \varphi(gk) | k \in K_f \rangle$ tem dimensão finita;

Formas automórficas suaves

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** suave se satisfaz:
  - (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;
  - (ii) O espaço $\langle \varphi(gk) | k \in K_f \rangle$ tem dimensão finita;
  - (iii) O espaço $\langle X\varphi(g) | X \in \mathcal{Z} \rangle$ tem dimensão finita;

Formas automórficas suaves

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** suave se satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;
  (ii) O espaço $\langle \varphi(gk) | k \in K_f \rangle$ tem dimensão finita;
  (iii) O espaço $\langle X\varphi(g) | X \in \mathcal{Z} \rangle$ tem dimensão finita;
  (iv) Existe um inteiro positivo r tal que para todo $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$,

$$|X\varphi(g)| \leq C_X ||g||^r.$$

Formas automórficas suaves

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** suave se satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;
  (ii) O espaço $\langle \varphi(gk) | k \in K_f \rangle$ tem dimensão finita;
  (iii) O espaço $\langle X\varphi(g) | X \in \mathcal{Z} \rangle$ tem dimensão finita;
  (iv) Existe um inteiro positivo r tal que para todo $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$,

$$|X\varphi(g)| \leq C_X ||g||^r.$$

Notação: $\mathcal{A}^\infty = \mathcal{A}^\infty(G(F) \setminus G(\mathbb{A}_F))$ denota o espaço das formas automórficas suaves.

Formas automórficas suaves

Definição

- Dizemos que uma função suave $\varphi : G(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **forma automórfica** suave se satisfaz:
  (i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ para $\gamma \in G(F)$ e $g \in G(\mathbb{A}_F)$;
  (ii) O espaço $\langle \varphi(gk) | k \in K_f \rangle$ tem dimensão finita;
  (iii) O espaço $\langle X\varphi(g) | X \in \mathcal{Z} \rangle$ tem dimensão finita;
  (iv) Existe um inteiro positivo r tal que para todo $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$,

$$|X\varphi(g)| \leq C_X ||g||^r.$$

Notação: $\mathcal{A}^\infty = \mathcal{A}^\infty(G(F) \setminus G(\mathbb{A}_F))$ denota o espaço das formas automórficas suaves.

- $\mathcal{A}^\infty$ tem a estrutura de um espaço de Fréchet em que a topologia é dada por semi-normas relacionadas com a condição de crescimento moderado uniforme.

Representações automórficas

Teorema (Harish-Chandra)

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{\infty}$.

Teorema (Harish-Chandra)

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^\infty$.
- $\mathcal{A}$ *é o espaço das formas automórficas* $\varphi \in \mathcal{A}^\infty$ *que são* K*-finitas.*

Teorema (Harish-Chandra)

- *$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{\infty}$.*
- *$\mathcal{A}$ é o espaço das formas automórficas $\varphi \in \mathcal{A}^{\infty}$ que são K-finitas.*
- *$\mathcal{A}$ é denso em $\mathcal{A}^{\infty}$.*

Representações automórficas

Teorema (Harish-Chandra)

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{\infty}$.
- *$\mathcal{A}$ é o espaço das formas automórficas $\varphi \in \mathcal{A}^{\infty}$ que são K-finitas.*
- *$\mathcal{A}$ é denso em $\mathcal{A}^{\infty}$.*

Definição (Langlands)

- Um subespaço $V \subset \mathcal{A}(G(F) \setminus G(\mathbb{A}_F))$ é uma sub-representação se é invariante pela ação de $\mathfrak{g}_{\infty}$, K_{∞} e $GL_n(\mathbb{A}_{fin})$.

Representações automórficas

Teorema (Harish-Chandra)

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^\infty$.
- $\mathcal{A}$ *é o espaço das formas automórficas* $\varphi \in \mathcal{A}^\infty$ *que são* K*-finitas.*
- $\mathcal{A}$ *é denso em* $\mathcal{A}^\infty$.

Definição (Langlands)

- Um subespaço $V \subset \mathcal{A}(G(F) \setminus G(\mathbb{A}_F))$ é uma sub-representação se é invariante pela ação de $\mathfrak{g}_\infty$, K_∞ e $GL_n(\mathbb{A}_{fin})$.
- Uma representação irredutível da forma V/U com $U \subset V$ sub-representações de $\mathcal{A}(G(F) \setminus G(\mathbb{A}_F))$ é chamada uma **representação automórfica** de $GL_n(\mathbb{A}_F)$.