MAT0030 - Geometria Diferencial
Agenda 01

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Apresentaremos maneiras de se descrever, de modo matematicamente preciso, curvas descritas por pontos em diversas situações usando essas funções vetoriais.

Nesta agenda veremos como tratar de modo matemático a noção de "curva" mediante o conceito de função escalar a valores vetoriais. Veremos o que devemos entender por "curva diferenciável", "curva suave" e veremos diversos outros conceitos sobre curvas.

Notações: Sejam A, B conjuntos, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ e $f : A \to B$ uma função. Escrevemos:

- $f\restriction_X \colon X \to B$ para denotar a **restrição da função f ao conjunto $X \subseteq A$**;
- $f\restriction^Y \colon A \to Y$ para denotar a **correstrição** de f ao subconjunto Y de seu contradomínio;
- $f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$ para denotar o **conjunto imagem de X por f**
- $f^{\dashv}[Y] = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ para denotar a **pré-imagem de Y por f**.

1 Funções de Variável Real a Valores Vetoriais

Nesta seção fazemos uma revisão de alguns conceitos estudados nos cursos de Cálculo e Análise.

Definição 1. *Uma função cujo domínio está contido em $\mathbb{R}$ e cujo contradomínio é $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ é uma **função vetorial** ou uma **função de variável real a valores vetoriais**.*

*j.berni@unesp.br

Definição 2. *Seja :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: &]a,b[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{array}$$

uma função a valores vetoriais e $t_0 \in [a,b]$. Dizemos que ***o limite de*** $\sigma(t)$ ***conforme*** t ***tende a*** t_0 ***é*** $(L_1, L_2, L_3) \in \mathbb{R}^3$ *se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $t \in]a,b[$ e $0 < |t - t_0| < \delta$ tivermos:*

$$\|(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) - (L_1, L_2, L_3)\| < \varepsilon$$

Neste caso, escrevemos:

$$\lim_{t \to t_0} \sigma(t) = (L_1, L_2, L_3)$$

Em outras palavras, tem-se:

$$\lim_{t \to t_0} \sigma(t) = (L_1, L_2, L_3)$$

se, e somente se, a fim de obtermos vetores $\sigma(t)$ *arbitrariamente* próximos do vetor (L_1, L_2, L_3) bastar tomarmos t *suficientemente* próximos de t_0.

Um modo mais prático de obter limites de funções de variável real a valores vetoriais é dado na seguinte:

Proposição 3. *Seja :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: &]a,b[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{array}$$

uma função a valores vetoriais e $t_0 \in [a,b]$.

Temos:

$$\lim_{t \to t_0} \sigma(t) = (L_1, L_2, L_3)$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \to t_0} x_1(t) = L_1, \ \lim_{t \to t_0} x_2(t) = L_2 \ e \ \lim_{t \to t_0} x_3(t) = L_3$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\sigma : I \to \mathbb{R}^n$ seja tal que:

$$\lim_{t \to t_0} \sigma(t) = (L_1, L_2, L_3)$$

ou seja, tal que para $\varepsilon > 0$ qualquer dado, existe $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall t \in]a, b[)(|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\sigma(t) - (L_1, L_2, L_3)\| < \varepsilon)$$

Faremos a prova no caso em que $n = 3$. Neste caso, podemos escrever:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: &]a, b[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{array}$$

Para $i \in \{1, 2, 3\}$, vale:

$$|x_i(t) - L_i| = \sqrt{(x_i(t) - L_i)^2} \leq \sqrt{(x_1(t) - L_1)^2 + (x_2(t) - L_2)^2 + (x_3(t) - L_3)^2} = \\ = \|\sigma(t) - (L_1, L_2, L_3)\| \quad (1)$$

Assim, se tivermos $0 < |t - t_0| < \delta$, teremos (por hipótese):

$$\|\sigma(t) - (L_1, L_2, L_3)\| < \varepsilon$$

e, por (1),

$$|x_i(t) - L_i| \leq \|\sigma(t) - (L_1, L_2, L_3)\| < \varepsilon$$

o que implica que:

$$\lim_{t \to t_0} x_1(t) = L_1, \ \lim_{t \to t_0} x_2(t) = L_2 \text{ e } \lim_{t \to t_0} x_3(t) = L_3$$

($\Leftarrow$) Se, por sua vez, $x_1, x_2, x_3 : I \to \mathbb{R}$ forem tais que $\lim_{t \to t_0} x_1(t) = L_1$, $\lim_{t \to t_0} x_2(t) = L_2$ e $\lim_{t \to t_0} x_3(t) = L_3$, então fixado $\varepsilon > 0$, teremos $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ tais que:

$$(\forall t \in I) \left(0 < |t - t_0| < \delta_1 \Rightarrow |x_1(t) - L_1| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

$$(\forall t \in I) \left(0 < |t - t_0| < \delta_2 \Rightarrow |x_2(t) - L_2| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

$$(\forall t \in I) \left(0 < |t - t_0| < \delta_3 \Rightarrow |x_3(t) - L_3| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Se tomarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, teremos:

$$0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow (|t - t_0| < \delta_1) \& (|t - t_0| < \delta_2) \& (|t - t_0| < \delta_3)$$

e portanto, como:

$$\left(0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_1(t) - L_1| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

$$\left(0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_2(t) - L_2| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

e:

$$\left(0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_3(t) - L_3| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

segue que:

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\sigma(t) - \sigma(t_0)\| \leq |x_1(t) - L_1| + |x_2(t) - L_2| + |x_3(t) - L_3| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

A demonstração dada acima é facilmente adaptada para o caso em que $n = 2$. □

A proposição acima nos permite, portanto, afirmar que "o limite de uma função de variável real a valores vetoriais pode ser calculado coordenada a coordenada", ou seja, que vale:

$$\lim_{t \to t_0}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \left(\lim_{t \to t_0} x_1(t), \lim_{t \to t_0} x_2(t), \lim_{t \to t_0} x_3(t)\right) = (L_1, L_2, L_3)$$

A definição de continuidade de uma função de variável real a valores vetoriais é dada a seguir:

Definição 4. *Dado um ponto $t_0 \in]a, b[$, dizemos que a função $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^n, n \geq 2$ é **contínua em** t_0 se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ é possível encontrar $\delta > 0$ tal que:*

$$(\forall t \in]a, b[)(|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \varepsilon)$$

A seguinte caracterização se mostra extremamente útil:

Proposição 5. *Dado um ponto $t_0 \in]a, b[$, dizemos que a função $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^n, n \geq 2$ é contínua em t_0 se, e somente se, as funções-coordenadas, $x_i :]a, b[\to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$ forem contínuas em t_0.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ seja contínua. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall t \in]a, b[)(|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \varepsilon)$$

Faremos a prova no caso em que $n = 2$. Neste caso, podemos escrever:

$$\begin{array}{rccc} \gamma: &]a,b[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t)) \end{array}$$

Para $i \in \{1,2\}$, vale:

$$|x_i(t) - x_i(t_0)| = \sqrt{(x_i(t) - x_i(t_0))^2} \leq \sqrt{(x_1(t) - x_1(t_0))^2 + (x_2(t) - x_2(t_0))^2} = \\ = \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \quad (2)$$

Assim, se tivermos $|t - t_0| < \delta$, teremos (por hipótese):

$$\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \varepsilon$$

e, por (2),

$$|x_i(t) - x_i(t_0)| \leq \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \varepsilon$$

o que implica que x_1 e x_2 são ambas contínuas.

($\Leftarrow$) Se, por sua vez, $x_1, x_2 :]a,b[\to \mathbb{R}$ forem ambas contínuas, fixado $\varepsilon > 0$, teremos $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$(\forall t \in I)\left(|t - t_0| < \delta_1 \Rightarrow |x_1(t) - x_1(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$(\forall t \in I)\left(|t - t_0| < \delta_2 \Rightarrow |x_2(t) - x_2(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Se tomarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, teremos:

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow (|t - t_0| < \delta_1) \& (|t - t_0| < \delta_2)$$

e portanto, como:

$$\left(|t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_1(t) - x_1(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

e:

$$\left(|t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_2(t) - x_2(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

segue que:

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \leq |x_1(t) - x_1(t_0)| + |x_2(t) - x_2(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

A demonstração dada acima é facilmente adaptada para o caso em que $n = 3$. □

Na prática, para verificar que uma função $\sigma :]a,b[\to \mathbb{R}^3$ é contínua, basta verificarmos se vale:

$$\lim_{t\to t_0} \sigma(t) = \lim_{t\to t_0} (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0))$$

Diremos que uma função de variável real a valores vetoriais, $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^n, n \geq 2$ é contínua em $]c,d[\subseteq]a,b[$ se, e somente se, para todo $t_0 \in]c,d[$, γ for contínua em t_0.

Exemplo 6. *As seguintes funções de variável real a valores vetoriais são contínuas nos seus domínios indicados:*

(a)

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t-\sin(t), 1-\cos(t)) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \left(e^t, \cos(3t), e^{\sin(2t)}\right) \end{array}$$

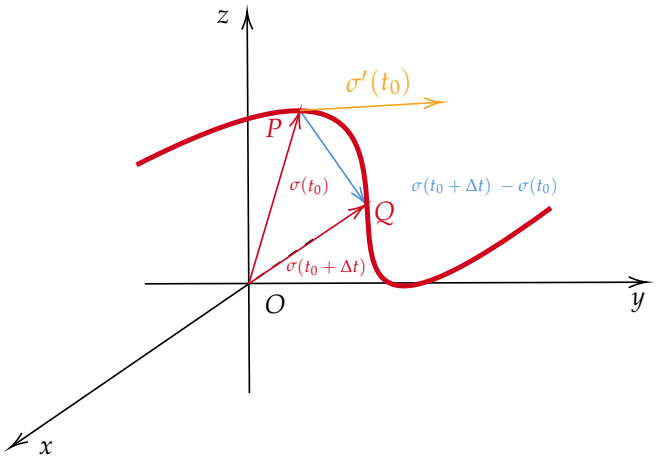
Definição 7. *A **derivada da função de variável escalar a valores vetoriais**, $\sigma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, no ponto $t_0 \in [a,b]$ é denotada por $\sigma'(t_0)$, definida por:*

$$\sigma'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\sigma(t_0+\Delta t) - \sigma(t_0)}{\Delta t}, \ \ se \ \ t_0 \in]a,b[$$

$$\sigma'_+(t_0) = \lim_{\substack{\Delta t\to 0 \\ \Delta t\geq 0}} \frac{\sigma(t_0+\Delta t) - \sigma(t_0)}{\Delta t}, \ \ se \ \ t_0 = a$$

$$\sigma'_-(t_0) = \lim_{\substack{\Delta t\to 0 \\ \Delta t\leq 0}} \frac{\sigma(t_0+\Delta t) - \sigma(t_0)}{\Delta t}, \ \ se \ \ t_0 = b$$

sempre que este limite existir.



Há uma interpretação geométrica para o vetor $\sigma'(t_0)$. Conforme a figura acima, sejam $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ os vetores posição correspondentes a $\sigma(t_0)$ e $\sigma(t_0+\Delta t)$, respectivamente. Então, o vetor $\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ é uma representação do vetor $\sigma(t_0+\Delta t) - \sigma(t_0)$. Segue que $\dfrac{1}{\Delta t} \cdot \vec{PQ}$ corresponde ao vetor $\dfrac{\sigma(t_0+\Delta t) - \sigma(t_0)}{\Delta t}$ tem a mesma direção do vetor $\vec{PQ}$.

Tomando valores cada vez mais próximos de 0 para Δt, teremos $\sigma(t_0+\Delta t)$ cada vez mais próximo de $\sigma(t_0)$ – e portanto Q cada vez mais próximo de P, de modo que o vetor $\dfrac{1}{\Delta t} \cdot \vec{PQ}$ se aproxima de um vetor que tem uma de suas representações tangente à curva C no ponto P. Por esta razão, nos referimos a $\sigma'(t_0)$ como **vetor tangente** à curva C em P.

Segue das definições dadas anteriormente que, para uma função de variável real a valores vetoriais, $\sigma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, a derivada de σ em $t_0 \in]a,b[$ é:

$$\sigma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

sempre que $x'(t_0), y'(t_0)$ e $z'(t_0)$ existirem.

Proposição 8. *Seja $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma função de variável real a valores vetoriais. Se para todo $t \in I$ o comprimento de $\sigma(t)$ for constante, então $\sigma(t) \perp \sigma'(t)$ para todo t.*

Demonstração. Seja $\|\sigma(t)\| = a$, de modo que:

$$\|\sigma(t)\|^2 = a^2$$

Mas,

$$\|\sigma(t)\|^2 = \langle (x(t), y(t), z(t)), (x(t), y(t), z(t)) \rangle = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2$$

e portanto temos, para todo $t \in I$,

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = a^2$$

Derivando os dois membros da equação acima implicitamente com respeito a t, obtemos:

$$2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 2 \cdot y(t) \cdot y'(t) + 2 \cdot z(t) \cdot z'(t) = 0$$

$$\langle (x(t), y(t), z(t)), (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle = 0$$

ou seja,

$$\langle \sigma(t), \sigma'(t) \rangle = 0$$

□

O resultado acima fica evidente no caso em que temos uma curva plana, pois neste caso a curva definida por σ será um arco de circunferência com centro na origem. O vetor tangente, $\sigma'(t)$, à circunferência centrada na origem é sempre ortogonal ao raio, $\sigma(t)$, daquela.

Exemplo 9. *Determinar as equações paramétricas da reta tangente à hélice definida por:*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t), t) \end{array}$$

no ponto $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Solução: *observamos que:*

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

de modo que:

$$\sigma\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \frac{\pi}{3}\right),$$

ou seja, P_0 *é o ponto final do vetor* $\sigma(\pi/3)$*. O vetor tangente à hélice neste ponto será, portanto:*

$$\sigma'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), 1\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Em posse de um ponto e um vetor ao qual a reta desejada é paralela, podemos descrever parametricamente a reta tangente à hélice neste ponto:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t, \\ y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot t, \\ z(t) = \frac{\pi}{3} + t \end{cases}$$

Definição 10 (Função de classe $\mathcal{C}^1$). *Seja $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Dizemos que uma função de variável real a valores vetoriais,*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: &]a,b[\subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

é de classe $\mathcal{C}^1(]a, b[, \mathbb{R}^3)$ se, e somente se, as funções $x, y, z : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem todas de classe $\mathcal{C}^1(]a, b[, \mathbb{R})$ – ou seja, se $x, y, z :]a, b[\to \mathbb{R}$ tiverem derivadas primeiras contínuas.

Definição 11 (Função de classe $\mathcal{C}^n$). *Seja $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Dizemos que uma função de variável real a valores vetoriais,*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & I =]a,b[\subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

é de classe $\mathcal{C}^n(]a, b[, \mathbb{R}^3)$ se, e somente se, as funções $x, y, z :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem todas de classe $\mathcal{C}^n(]a, b[, \mathbb{R})$ – ou seja, se $x, y, z :]a, b[\to \mathbb{R}$ tiverem derivadas de ordem até n, inclusive, contínuas.

Definição 12 (Função de classe $\mathcal{C}^\infty$). *Seja $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Dizemos que uma função de variável real a valores vetoriais,*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: &]a,b[\subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

é de classe $\mathcal{C}^\infty(]a, b[, \mathbb{R}^3)$ se, e somente se, as funções $x, y, z :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem todas de classe $\mathcal{C}^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$ – ou seja, se $x, y, z :]a, b[\to \mathbb{R}$ tiverem derivadas de todas as ordens contínuas.

Quando o domínio da função em apreço é um intervalo *fechado*, definimos função diferenciável como segue:

Definição 13. *Seja $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Uma função $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, com $n \in \{2, 3\}$, é diferenciável em $[a, b]$ se existirem um intervalo aberto J (que pode, inclusive, ser o próprio $\mathbb{R}$) contendo $[a, b]$ e uma função diferenciável $\Sigma : J \to \mathbb{R}^n$ tal que $\Sigma \restriction_{[a,b]} = \sigma$.*

Exemplo 14. *A função dada por:*

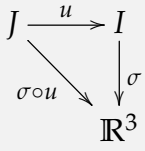
$$\begin{array}{rccc} \sigma: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \mapsto & (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{array}$$

é de classe C^∞, dado que sua primeira coordenada é restrição da função suave $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *enquanto que a segunda coordenada é restrição da função suave* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ao intervalo* $[a, b]$

O resultado a seguir estabelece a **Regra da Cadeia** para funções de variável real a valores vetoriais.

Teorema 15 (Regra da Cadeia). *Sejam $u : J \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}$ e $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ funções diferenciáveis em um ponto $t_0 \in J$ tal que $u(t_0) \in I$. Então:*

$$\frac{d}{dt}[\sigma(u(t))] = \frac{d\sigma}{du}(u(t)) \cdot u'(t) \tag{3}$$



Demonstração. Se $\sigma(u(t)) = (x(u(t)), y(u(t)), z(u(t)))$, então:

$$\frac{d}{dt}\sigma(u(t)) = \left(\frac{d}{dt}x(u(t)), \frac{d}{dt}y(u(t)), \frac{d}{dt}z(u(t))\right)$$

Mas já sabemos, pela **Regra da Cadeia** para funções de uma variável real a valores reais, que:

$$\frac{d}{dt}x(u(t)) = x'(u(t)) \cdot u'(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(u(t)) = y'(u(t)) \cdot u'(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(u(t)) = z'(u(t)) \cdot u'(t)$$

Assim, segue que:

$$\frac{d}{dt}[\sigma(u(t))] = \big(x'(u(t)) \cdot u'(t), y'(u(t)) \cdot u'(t), z'(u(t)) \cdot u'(t)\big) =$$

$$= (x'(u(t)), y'(u(t)), z'(u(t))) \cdot u'(t) = \frac{d\sigma}{du}(u(t)) \cdot u'(t)$$

□

2 Curvas Parametrizadas Diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$

As funções introduzidas na seção anterior são de particular importância na definição formal de uma *curva parametrizada diferenciável*.

Temos, portanto, a seguinte:

Definição 16 (Curva parametrizada diferenciável em $\mathbb{R}^2$). *Uma **curva parametrizada diferenciável em** $\mathbb{R}^2$ é um par $(C, \gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^2)$, onde $C \subseteq \mathbb{R}^2$ é o conjunto imagem de uma função diferenciável:*

$$\begin{array}{rccc} \gamma: &]a,b[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t)) \end{array}$$

que, a cada número $t \in]a,b[$ associa um ponto do plano, $(x_1(t), x_2(t))$. Ao conjunto:

$$C = \gamma\,[]a,b[] \doteq \{(x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}$$

*denominamos o **traço da curva** γ. O traço da curva é, intuitivamente, a "curva geométrica", a "curva desenhada".*

Analogamente, temos a seguinte:

Definição 17 (Curva parametrizada diferenciável em $\mathbb{R}^3$). *Uma **curva parametrizada diferenciável em** $\mathbb{R}^3$ é um par $(C, \gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^3)$, onde $C \subseteq \mathbb{R}^3$ é o conjunto imagem de uma função diferenciável:*

$$\begin{array}{rccc} \gamma: &]a,b[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{array}$$

que, a cada número $t \in]a,b[$ associa um ponto do espaço, $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Ao conjunto:

$$C = \gamma\,[]a,b[] \doteq \{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in]a,b[\}$$

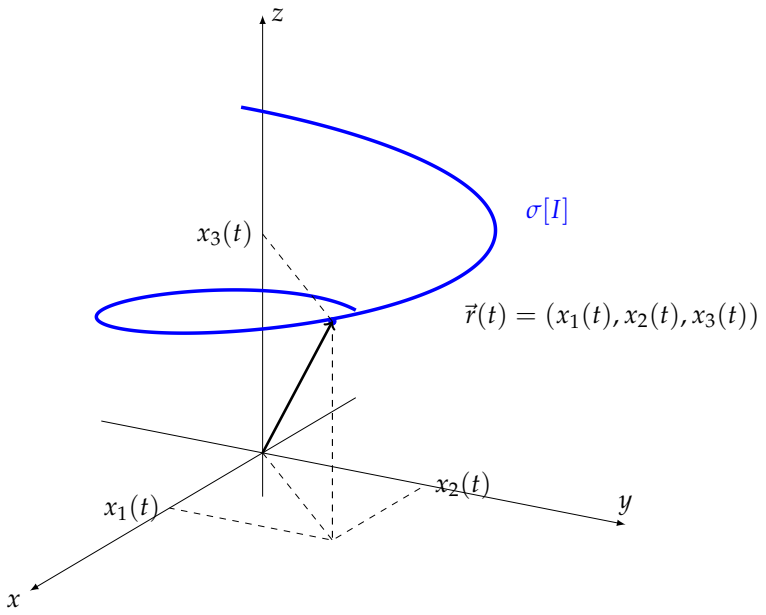
*denominamos o **traço da curva** γ. O traço da curva é, intuitivamente, a "curva geométrica", a "curva desenhada".*

Observe que a definição de função vetorial definida em um intervalo $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}^3$ nos fornece, para cada $t \in]a,b[$, um vetor $\vec{r}(t)$, com origem em $O = (0,0,0)$ e extremidade em $P = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, como no desenho abaixo:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: &]a,b[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{array} \tag{4}$$

onde $x_1, x_2, x_3 :]a, b[\to \mathbb{R}$ são funções *reais*.

Para cada $t \in]a, b[$, temos um vetor $\sigma(t) \in \mathbb{R}^3$, dado pelo vetor $\vec{OP}$, onde $O = (0, 0, 0)$ e $P = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$:



Definição 18. *Sejam $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e:*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : &]a, b[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

uma função contínua em I. Dizemos que:

$$\sigma[I] = \{(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in]a, b[\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

*é uma **curva** – que geralmente denotamos por C. Dizemos, neste caso, que $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ é uma **parametrização de** $\sigma[I]$, e que $(\sigma[I], \sigma : I \to \mathbb{R}^3)$ é uma **curva parametrizada**. As equações:*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{5}$$

*são chamadas as **equações paramétricas** da curva C, e a variável t é o **parâmetro**.*

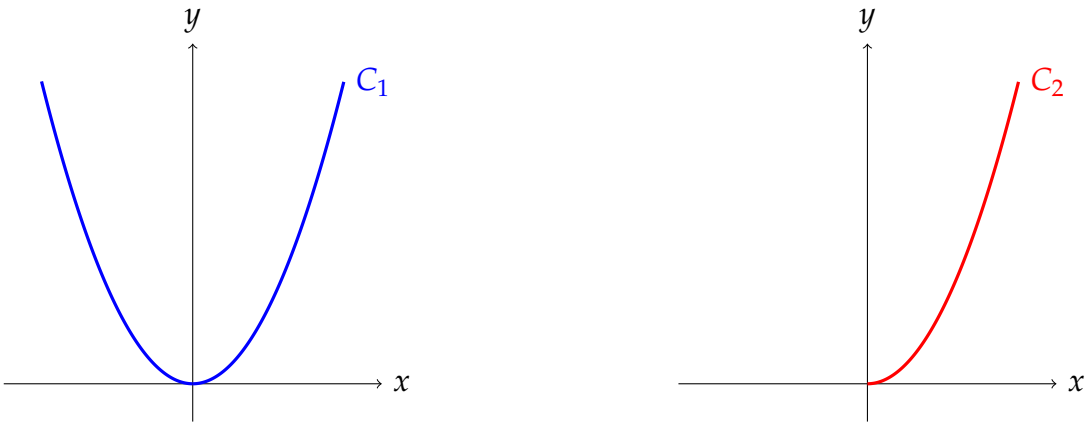
Ao eliminarmos t no sistema (5), obteremos uma expressão cartesiana da curva C.

A definição de curva parametrizada diferenciável é feita mediante "pares ordenados", consistindo de um conjunto, C, e de uma função diferenciável, σ, com domínio em um intervalo aberto e imagem igual ao conjunto C. Convém destacar que um mesmo traço pode ser parametrizado de modos diferentes, fornecendo portanto curvas diferentes. Reciprocamente, duas funções diferentes nos fornecem curvas parametrizadas com traços diferentes, como ilustra o seguinte exemplo:

Exemplo 19. *Considere as seguintes curvas parametrizadas definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ pelas equações paramétricas:*

$$C_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad C_2 : \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^4 \end{cases}$$

Em ambos os casos observamos que é possível reduzir as duas equações paramétricas à equação cartesiana $y = t^2$ (bastando substituir na expressão que nos dá y, t por x). No entanto, temos curvas bem diferentes, conforme podemos notar abaixo:



A diferença está no fato de que, na equação paramétrica que nos dá a coordenada x de C_2, aparece t^2, que é maior ou igual a zero para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Assim, $(C_1, \sigma_1) \neq (C_2, \sigma_2)$

Exemplo 20. *Seja ℓ uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$ com $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$. Qualquer ponto $P \in \ell$ desta reta é:*

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t \cdot \vec{V} \text{ para algum } t \in \mathbb{R}$$

Assim, uma parametrização de ℓ é:

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (v_1, v_2, v_3) \end{array}$$

e ℓ se expressa em equações paramétricas como:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t \cdot v_1 \\ y(t) = y_0 + t \cdot v_2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z(t) = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t das equações paramétricas de ℓ ("isolando t"), obtemos:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = t = \frac{y - y_0}{v_2} = t = \frac{z - z_0}{v_3}$$

de modo que $(\ell, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)$ é uma curva parametrizada diferenciável.

Assim, por exemplo, a reta de equação $2x - y = 1$ ($\therefore y = 2x - 1$), por exemplo, admite como parametrização:

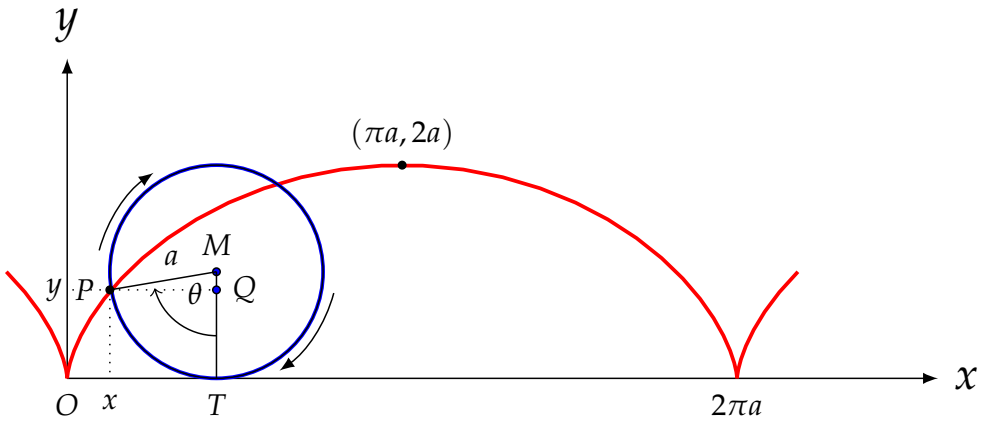
$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, 2t - 1) \end{array}$$

Exemplo 21. *Seja C a curva do plano Oxy, gráfico de uma função contínua $f :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Uma parametrização (bem natural) de C pode ser dada por:*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : &]a, b[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, f(t)) \end{array}$$

Assim, sempre que $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, $(\text{Graf}\,(f), \gamma)$ é uma curva diferenciável parametrizada.

Exemplo 22 (ciclóide). *A curva plana descrita por um ponto P sobre a circunferência quando esta gira ao longo de uma reta é chamada **ciclóide**. Suponhamos que a circunferência tenha raio $a > 0$ e que o eixo Ox seja a reta fixa sobre a qual gira a circunferência. Consideremos o ponto P na origem quando o centro da circunferência está em $(0, a)$. A figura abaixo mostra a circunferência depois de o ponto P ter girado um ângulo de θ radianos.*



https://www.geogebra.org/m/E43dxBju

Na figura acima, tem-se:

$$\begin{cases} OT = \text{ comprimento do arco } PT = a \cdot \theta \\ PQ = a \cdot \sin(\theta) \\ MQ = a \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

Portanto, as equações paramétricas de C são:

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cdot (\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = a \cdot (1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

para $\theta \in \mathbb{R}$.

A ciclóide tem inúmeras aplicações, como na resolução do problema de se projetar um pêndulo cujo período independa da amplitude da oscilação (também conhecido como o problema da curva *tautócrona*).

Ao confeccionarmos um pêndulo cujo cordão esteja restrito à concatenação de duas ciclóides idênticas, como apresentado abaixo, o peso do pêndulo descreverá, ao oscilar, arcos de ciclóide.

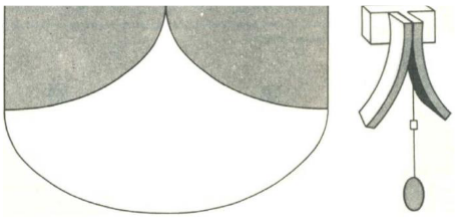
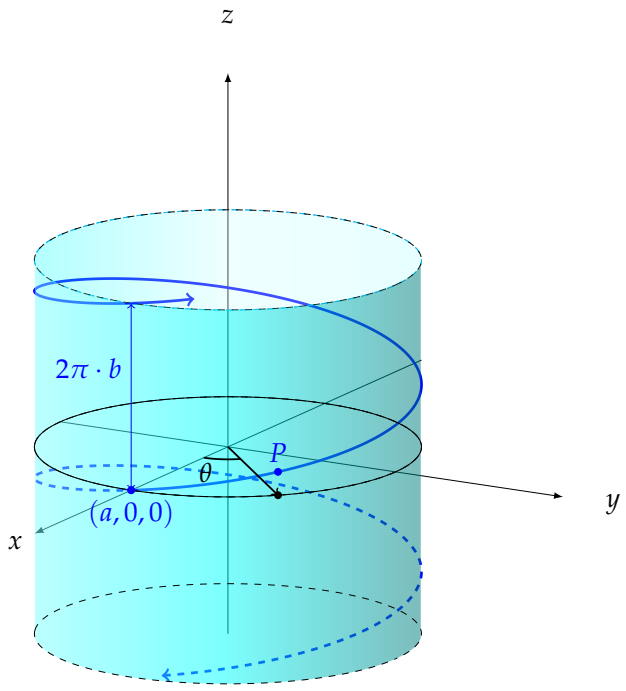


Figura 1: Dois arcos de cicloide constituindo os "batentes" de um pêndulo.

Além disto, o período da oscilação independerá de sua amplitude.

Agora apresentaremos o exemplo de uma curva no espaço tridimensional.

Exemplo 23. *Um ponto* $P = (x, y, z)$ *se move em torno do eixo z mantendo uma distância constante* $a > 0$ *deste eixo. Simultaneamente, ele se move paralelamente ao eixo z de modo que sua terceira componente é proporcional ao ângulo de rotação com constante de proporcionalidade* $b \neq 0$*. A curva descrita por este ponto é chamada* ***hélice circular****. Consideremos, no início do movimento, o ponto P em* $(a, 0, 0)$*. A figura a seguir mostra o ponto P após uma rotação de* θ *radianos.*



https://www.geogebra.org/3d/thd7jsxd

Se θ é o ângulo de rotação, temos:

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) = a \cdot \sin(\theta) \\ z = b \cdot \theta \end{cases}$$

Quando θ varia de 0 a 2π, as coordenadas de x e y voltam ao valor inicial e z varia de 0 a $2\pi \cdot b$. Uma parametrização da hélice é:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \theta & \mapsto & (a \cdot \cos(\theta), a \cdot \sin(\theta), b \cdot \theta) \end{array}$$

que é uma função suave, pois cada uma de suas funções-coordenadas é suave.

Assim, se $H = \{(a \cdot \cos(\theta), a \cdot \cos(\theta), b \cdot \theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, (H, σ) é uma curva parametrizada suave.

3 *Gedankenexperiment*: Estudo de Movimentos

Imagine uma partícula se movendo em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$ de tal modo que a sua posição em cada instante $t \in I$, onde I é um intervalo (aberto, fechado, semiaberto etc.) é dada pela extremidade do vetor $\sigma(t)$, onde $\sigma : I \to \mathbb{R}^n, n \in \{2, 3\}$ sempre denotará, nesta seção, uma função no mínimo diferenciável. A função $\sigma(t)$ é chamada de **função posição** do movimento.

Quando t varia em um intervalo de tempo, a trajetória da partícula é a curva definida por $\sigma(t)$ percorrida no sentido do crescimento de t. Conceitos físicos tais como "vetor velocidade", "velocidade escalar" e "vetor aceleração" podem ser definidos em termos das derivadas do vetor posição.

Nesta seção assumiremos que a função posição é diferenciável tantas vezes quanto necessário.

Definição 24. *Considere o movimento de uma partícula descrito pela função posição* $\sigma :]a, b[\to \mathbb{R}^n, t \mapsto \sigma(t)$. *A derivada,* $\sigma'(t)$, *é chamada* ***vetor velocidade****. O comprimento do vetor velocidade,* $\|\sigma'(t)\|$, *é chamado* ***velocidade escalar****. A derivada segunda,* $\sigma''(t)$, *é chamada* ***vetor aceleração****.*

Notação: Denotamos o vetor velocidade por $\vec{v}(t)$, a velocidade escalar por $v(t)$ e o vetor aceleração por $\vec{a}(t)$. Desta forma, $\vec{v} = \sigma'$, $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ e $\vec{a} = \vec{v}'(t) = \sigma''(t)$.

Exemplo 25. *Uma partícula se move sobre a circunferência* $x^2 + y^2 = a^2$ *no sentido anti-horário, com velocidade angular constante de uma revolução por segundo, começando no ponto* $(a, 0)$ *quando* $t = 0$. *Determinar:*

(a) uma parametrização da trajetória tendo o tempo como parâmetro;

(b) $\vec{v}(t)$, $v(t)$ *e* $\vec{a}(t)$*;*

(c) Um esboço da trajetória e representações dos vetores velocidade e aceleração quando $t = \frac{1}{8}$.

Solução:

(a) Já vimos que uma parametrização da circunferência é:

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) = a \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Neste caso específico, queremos o parâmetro, θ, dado em função do tempo, t.

Como a velocidade da partícula é uma revolução por segundo, então sua velocidade angular, $\frac{d\theta}{dt}$ é 2π radianos por segundo. Portanto, $\theta(t) = 2\pi \cdot t$, visto que $\theta(0) = 0$. Desta forma, uma parametrização da trajetória é:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (a \cdot \cos(2\pi \cdot t), a \cdot \sin(2\pi \cdot t)) \end{array}$$

se a partícula percorre a circunferência apenas uma vez.

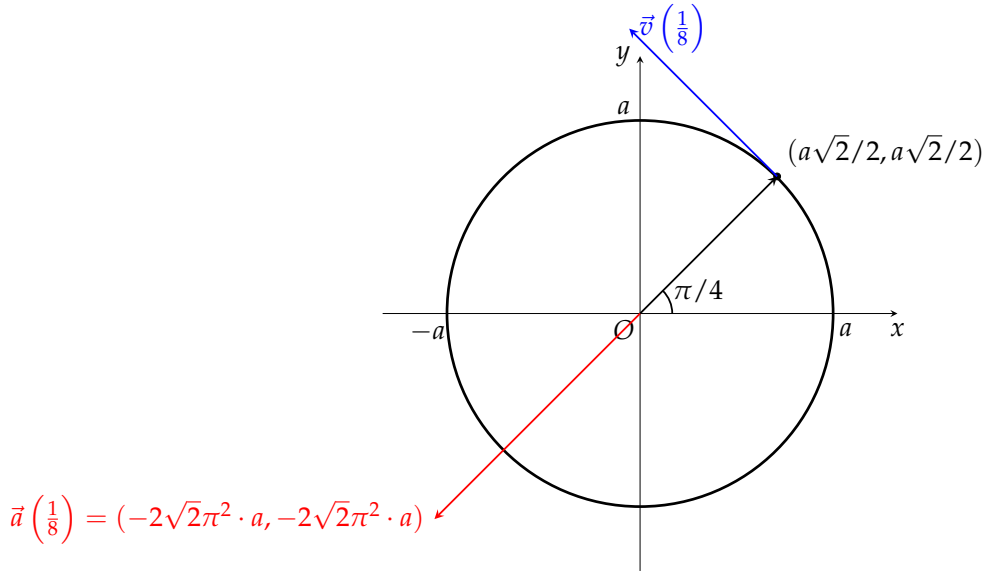
(b) $\vec{v}(t) = \sigma'(t) = (-2\pi \cdot a \cdot \sin(2\pi \cdot t), 2\pi \cdot a \cdot \cos(2\pi \cdot t))$
Também,

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \|\sigma'(t)\| =$$
$$= \sqrt{(-2\pi \cdot a \cdot \sin(2\pi \cdot t))^2 + (2\pi \cdot a \cdot \cos(2\pi \cdot t))^2} = 2\pi \cdot a$$

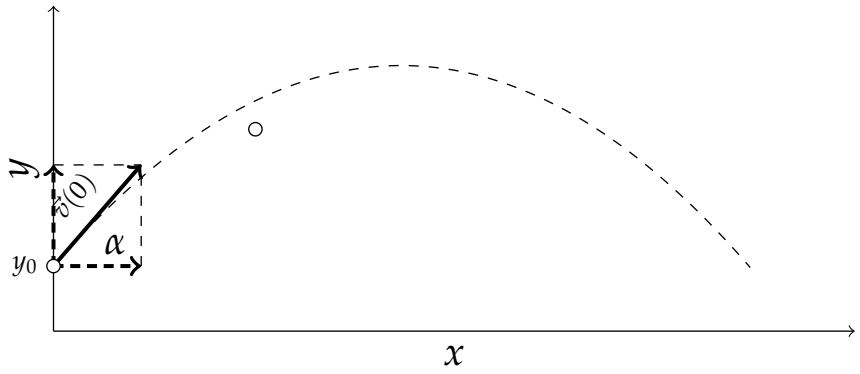
e:

$$\vec{a}(t) = \sigma''(t) = (-4\pi^2 \cdot a \cdot \cos(2\pi \cdot t), -4\pi^2 \cdot a \cdot \sin(2\pi \cdot t))$$

(c) $\vec{v}(1/8) = (-\sqrt{2}\pi a, \sqrt{2}\pi a)$, $\vec{a}(1/8) = (-2\sqrt{2}\pi^2 \cdot a, -2\sqrt{2}\pi^2 \cdot a)$, que representamos na seguinte figura:



Exemplo 26. *Suponha que um projétil, a uma altura de y_0 metros do chão, seja lançado ao ar, fazendo um ângulo de α radianos com a horizontal, com velocidade escalar inicial v_0. Desprezando a resistência do ar, podemos supor que a única força que atua sobre o projétil é constante e atua para baixo com magnitude $m \cdot g$ newtons, onde m é a massa do projétil e g é a aceleração da gravidade. Neste contexto, o vetor força resultante é $\vec{F} = (0, -m \cdot g)$. Determinar o vetor posição do projétil em cada instante.*



Solução: Se $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ é o vetor posição, tem-se $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}\ (t) = (x'(t), y'(t))$ e $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}\ (t) = (x''(t), y''(t))$.

Desta forma, pela segunda lei de Newton, tem-se:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} = m \cdot (x''(t), y''(t))$$
$$(0, -m \cdot g) = (m \cdot x''(t), m \cdot y''(t))$$

e portanto:

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -g \end{cases}$$

Mas

$$x''(t) = 0 \iff (x')'(t) = 0 \Rightarrow x' = D, \text{ constante}$$

$$y''(t) = -g \iff (y')'(t) = -g \Rightarrow y'(t) = -g \cdot t + C,$$

onde C é uma constante. Para determinarmos os valores de C e de D, usaremos a condição inicial dada, que no instante $t = 0$ a velocidade do projétil tem magnitude v_0, de modo que o vetor velocidade neste instante deve ser:

$$\vec{v}(0) = (v_0 \cdot \cos(\alpha), v_0 \cdot \sin(\alpha)).$$

Assim,

$$x'(t) = D \Rightarrow x'(0) = D \Rightarrow v_0 \cdot \cos(\alpha) = D$$

$$y'(t) = -g \cdot t + C \Rightarrow y'(0) = -g \cdot 0 + C \Rightarrow v_0 \cdot \sin(\alpha) = C$$

e obtemos:

$$\begin{cases} x'(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ y'(t) = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

Das equações acima conclui-se que:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + K \\ y(t) = -g \cdot \dfrac{t^2}{2} + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + L \end{cases}$$

onde K e L são constantes que precisamos determinar.

Sabemos, no entanto, que $x(0) = 0$, logo:

$$0 = x(0) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot 0 + K = K \Rightarrow K = 0$$

e como $y(0) = y_0$, temos:

$$y_0 = y(0) = -g \cdot \frac{0^2}{2} + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot 0 + L \Rightarrow L = y_0$$

Concluímos, portanto, que:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \text{ e } y(t) = -g \cdot \frac{t^2}{2} + (v_0 \cdot \sin(\alpha)) \cdot t + y_0$$

e o vetor posição neste movimento é:

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t, -g \cdot \frac{t^2}{2} + (v_0 \cdot \sin(\alpha)) \cdot t + y_0 \right)$$

4 Curvas Parametrizadas Diferenciáveis Regulares e a Parametrização por Comprimento de Arco

Dada uma curva parametrizada diferenciável, $(C, \sigma : I \to \mathbb{R}^n), n \in \{2, 3\}$, para cada $t_0 \in I$ tal que $\sigma'(t_0) \neq \vec{0}$ fica definida uma única reta na direção de $\sigma'(t_0)$. Para o desenvolvimento da Geometria Diferencial de Curvas é essencial a existência de uma tangente em todos os pontos da curva dada. Convém, portanto, chamar de **ponto singular** da curva (C, σ) a um ponto $t_0 \in I$ tal que $\sigma'(t_0) = \vec{0}$. Isto nos sugere a seguinte:

Definição 27 (curva parametrizada diferenciável regular). *Uma curva parametrizada diferenciável,* $(C, \sigma : I \to \mathbb{R}^n), n \in \{2,3\}$*, é* ***regular*** *se:*

$$(\forall t \in I)(\sigma'(t) \neq \vec{0})$$

Nesta seção estudaremos um modo "canônico" de parametrizar curvas diferenciáveis regulares, o que nos permitirá desenvolver conceitos centrais da Geometria Diferencial como os de curvatura e torção de um modo bastante intuitivo.

Considere uma curva (parametrizada diferenciável regular) definida por $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, n \in \{2,3\}, t \mapsto \sigma(t)$. Podemos pensar que esta curva é a trajetória descrita por uma partícula se movendo com velocidade escalar $v(t) = \|\sigma'(t)\|$. Qual é o comprimento desta curva conforme t "percorre" o intervalo $[a,b]$?

Intuitivamente, isto nada mais é do que o espaço percorrido pela partícula no intervalo de tempo $[a,b]$, ou seja,

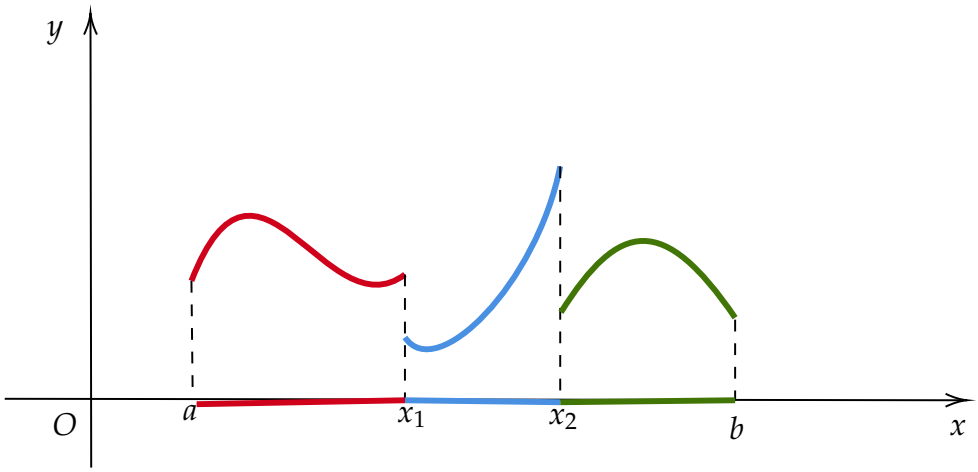
$$\int_a^b v(t)dt$$

Antes de prosseguirmos, recorde a seguinte:

Definição 28. *Uma função* $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *é* ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***por partes*** *se o intervalo* $[a,b]$ *puder ser subdividido em um número finito de intervalos consecutivos e não sobrepostos, digamos:*

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_n,$$

com I_i*,* $i \in \{1, \cdots, n\}$*, da forma* $[x_{i-1}, x_i], [x_{i-1}, x_i[,]x_{i-1}, x_i[$ *ou* $]x_{i-1}, x_i]$*, com* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$*, restritos aos quais* σ *é de classe* $\mathcal{C}^1$*, ou seja, tais que* $\sigma \restriction_{I_i} \in \mathcal{C}^1(I_i, \mathbb{R}^n)$*.*



$$[a,b] = [a,\ x_1\ ] \cup [x_1\ , x_2] \cup [x_2,\ b]$$

Definição 29. *Seja* $(C, \sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n), n \in \{2,3\}$, *uma curva parametrizada diferenciável regular com* $\sigma \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^3)$. *O* ***comprimento da curva parametrizada*** $(C, \sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n)$ *é:*

$$L(C,\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \tag{6}$$

Esta fórmula ainda é válida no caso em que σ *é de classe* $\mathcal{C}^1$ *por partes.*

No caso de uma curva $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, temos:

$$L(C,\sigma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

e no caso de uma curva $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, temos:

$$L(C,\sigma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Exemplo 30. *Calcular o comprimento da hélice* $(H, \eta : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3)$ *onde:*

$$\begin{array}{rccc} \eta: & [0,4\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (\cos(3t), \sin(3t), 4t) \end{array}$$

e $H = \eta[0, 4\pi]$.

Solução: Temos:

$$\eta'(t) = \left(\frac{d}{dt}(\cos(3t)), \frac{d}{dt}(\sin(3t)), \frac{d}{dt}(4t)\right) = (-3 \cdot \sin(3t), 3 \cdot \cos(3t), 4),$$

de modo que:

$$\|\eta'(t)\| = \sqrt{(-3\cdot\sin(3t))^2 + (3\cdot\cos(3t))^2 + 4^2} = \sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$L(H,\eta) = \int_0^{4\pi} \|\eta'(t)\|dt = \int_0^{4\pi} 5dt = 20\pi$$

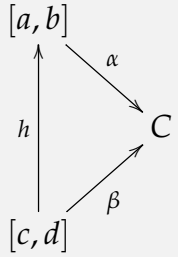
Definição 31 (parametrizações equivalentes). *Sejam $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ e $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ duas funções de classe $\mathcal{C}^1$ tais que:*

$$\alpha[a,b] = C = \beta[c,d]$$

*ou seja, $(C, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3)$ e $(C, \beta : [c,d] \to \mathbb{R}^3)$ são curvas parametrizadas de classe $\mathcal{C}^1$. Dizemos que α e β são **parametrizações equivalentes** se, e somente se, existir um homeomorfismo de classe $\mathcal{C}^1$,*

$$h : [c,d] \to [a,b]$$

tal que:



comuta, ou seja, tal que:

$$(\forall t \in [c,d])(\beta(t) = \alpha(h(t))).$$

Neste caso, escrevemos $\alpha \sim_h \beta$.

Se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ e $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ forem parametrizações equivalentes, então $h : [c,d] \to [a,b]$ relaciona as velocidades com que as partículas se movem sobre C, pois pela **Regra da Cadeia**:

$$\beta'(t) = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t).$$

Se $(\forall t \in [c,d])(h'(t) > 0)$, então a partícula com vetor posição dado por β percorre C no mesmo sentido que a partícula cujo vetor posição é α. No caso em que $(\forall t \in [c,d])(h'(t) < 0)$, elas se movem sobre C em sentidos contrários.

O seguinte resultado nos garante que o comprimento de uma curva parametrizada independe das parametrizações equivalentes escolhidas.

Teorema 32. *Sejam $(C, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n)$ e $(C, \beta : [c,d] \to \mathbb{R}^3)$ curvas parametrizadas tais que α e β são parametrizações equivalentes ($\alpha \sim_h \beta$). Então:*

$$L(C, \alpha) = L(C, \beta)$$

Demonstração. Como $\alpha \sim_h \beta$, $h : [c,d] \to [a,b]$ é, em particular, uma bijeção de classe $\mathcal{C}^1$ tal que, se:

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & [a,b] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

tem-se:

$$\begin{array}{rccc} \beta : & [c,d] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (x(h(t)), y(h(t)), z(h(t))) \end{array}$$

Por um lado, temos:

$$L(C, \beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\| dt = \int_c^d |h'(t)| \cdot \|\alpha'(h(t))\| dt =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_a^b h'(t) \cdot \|\alpha'(h(t))\| dt, & \text{se } h \text{ é crescente;} \\ \displaystyle\int_a^b -h'(t) \cdot \|\alpha'(h(t))\| dt & \text{se } h \text{ é decrescente;} \end{cases}$$

Fazendo a substituição $u = h(t)$, de modo que $du = h'(t)dt$, temos:

$$L(C, \beta) = \begin{cases} \displaystyle\int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(u)\| du = L(C, \alpha), & \text{se } h \text{ é crescente;} \\ \displaystyle\int_{h(c)}^{h(d)} -\|\alpha'(u)\| du = L(C, \alpha) & \text{se } h \text{ é decrescente;} \end{cases}$$

Deste modo, segue que:

$$\alpha \sim_h \beta \Rightarrow L(C, \alpha) = L(C, \beta).$$

□

Exemplo 33. *Há um modo natural de parametrizar o gráfico de uma função de uma variável real de classe $\mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$:*

$$\text{Graf}\,(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$$

Basta simplesmente tomamos a variável independente como o parâmetro. Neste caso, a parametrização é:

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, f(t)) \end{array}$$

dada em equações paramétricas por:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

Assim, tem-se:

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, f'(t)), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}.$$

de modo que o comprimento do gráfico de f em $[a,b]$ é:

$$L(C,\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt$$

4.1 Comprimento de arco como parâmetro

Consideremos um intervalo $[a,b]$ e um ponto $t_0 \in]a,b[$. O comprimento de uma curva parametrizada, $(C, \sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n)$, em que $\sigma \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, desde um ponto $P_0 = \sigma(t_0) \in \mathbb{R}^n$ até um ponto $P = \sigma(t), t \geq t_0$ é, em virtude de (6), dada por:

$$\begin{array}{rccc} s: & [t_0,b] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\sigma'(u)\|\,du \end{array}$$

Como a curva é suposta regular, a função s é estritamente crescente, de modo que:

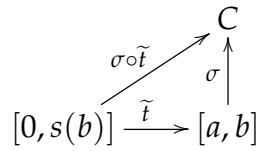
$$\begin{array}{rccc} \widetilde{s}: & [a,b] & \to & [0, s(b)] \\ & t & \mapsto & s(t) \end{array}$$

é bijetora, e portanto admite inversa,

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{t}: & [0, s(b)] & \to & [a,b] \\ & s & \mapsto & t(s) \end{array}$$

Isto nos permite *parametrizar a curva C em função do parâmetro s do seguinte modo*:

$$\sigma(t) = \sigma(t(s))$$



Dizemos que $\sigma \circ \widetilde{t}$ está parametrizada por comprimento de arco (p.p.c.a.).

Exemplo 34. *Seja (C, σ) a curva parametrizada por:*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \left(t^2, \frac{t^3}{3}\right) \end{array}$$

Obter a parametrização de C por comprimento de arco.

Solução: Como $\sigma'(t) = (2t, t^2)$, temos:

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+)(\|\sigma'(t)\| = |t| \cdot t^2 + 4 = t\sqrt{t^2+4})$$

e portanto:

$$s(t) = \int_0^t u \cdot \sqrt{u^2+4}du = \frac{1}{2} \cdot \int_0^t 2u \cdot \sqrt{u^2+4}du = \left[\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \cdot (u^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^t = \frac{1}{3} \cdot (t^2+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}$$

Neste caso, podemos expressar t em termos de s:

$$3s + 8 = (t^2+4)^{\frac{3}{2}}$$

Consequentemente,

$$t^2 + 4 = (3s+8)^{\frac{2}{3}}$$

Uma vez que $t \geq 0$, obtemos:

$$t = \sqrt{(3s+8)^{\frac{2}{3}} - 4}$$

Desta forma, temos:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{t}: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & s & \mapsto & \sqrt{(3s+8)^{\frac{2}{3}} - 4} \end{array}$$

de modo que a parametrização por comprimento de arco (p.p.c.a.) da curva é:

$$\begin{array}{rccc} \sigma \circ \widetilde{t}: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}^2 \\ & s & \mapsto & \left((3s+8)^{\frac{2}{3}} - 4, \frac{1}{3} \cdot ((3s+8)^{\frac{2}{3}} - 4)^{\frac{3}{2}}\right) \end{array}$$

Entretanto, frequentemente é impossível explicitar a p.p.c.a. Mesmo que $s = s(t)$ seja explicitamente conhecido, pode ser impossível determinar analiticamente a inversa de $\widetilde{s}$, $\widetilde{t} = t(s)$.

Felizmente, é rara a necessidade de se explicitar σ como função de s.

Proposição 35. *Seja $(C, \sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n)$ uma curva parametrizada de classe $\mathcal{C}^1$, e seja s o comprimento da trajetória percorrida pela partícula ao longo do intervalo de tempo $[0, t]$. Nestas condições, o vetor tangente à trajetória, $\dfrac{d\sigma}{ds}$, é unitário.*

Demonstração. Parametrizando a trajetória em relação ao comprimento de arco, temos:

$$\sigma(s) = \sigma(\widetilde{t}(s))$$

Pela **Regra da Cadeia**, temos:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{d\widetilde{t}} \cdot \frac{d\widetilde{t}}{ds} = \frac{\frac{d\sigma}{d\widetilde{t}}}{\frac{ds}{d\widetilde{t}}}.$$

Mas $\dfrac{ds}{d\widetilde{t}} = \dfrac{d}{d\widetilde{t}} \displaystyle\int_{t_0}^{\widetilde{t}} \left\| \frac{d\sigma}{du}(u) \right\| du = \left\| \frac{d\sigma}{d\widetilde{t}} \right\|$, e portanto:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{d\sigma}{d\widetilde{t}} \right\|} \cdot \frac{d\sigma}{d\widetilde{t}}$$

ou seja,

$$\left\| \frac{d\sigma}{ds} \right\| = \frac{1}{\left\| \frac{d\sigma}{d\widetilde{t}} \right\|} \cdot \left\| \frac{d\sigma}{d\widetilde{t}} \right\| = 1$$

□

4.2 Dois Vetores Importantes para o Estudo de uma Curva: Os Vetores Tangente Unitário e Normal Principal

Consideremos uma partícula móvel com vetor posição no instante t dado por $\sigma(t)$, vetor velocidade por $\vec{v}(t) = \sigma'(t)$ e vetor aceleração dado por $\vec{a}(t) = \sigma''(t)$.

Se o movimento da partícula é uma reta, então $\vec{a}(t) \parallel \vec{v}(t)$. Para um movimento circular com velocidade angular constante, $\vec{a}(t) \perp \vec{v}(t)$, conforme vimos.

Nesta seção, mostraremos que, num movimento qualquer, o vetor $\vec{a}(t)$ é a soma de dois vetores perpendiculares, um paralelo a $\vec{v}(t)$ e o outro perpendicular a $\vec{v}(t)$.

Com este fito, dada uma curva parametrizada diferenciável regular, (C, σ), introduziremos um **vetor tangente unitário**, $\vec{T}$, definido por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}, \tag{7}$$

onde, em virtude da exigência da regularidade da curva, tem-se $(\forall t \in I)\|\sigma'(t)\| \neq 0$.

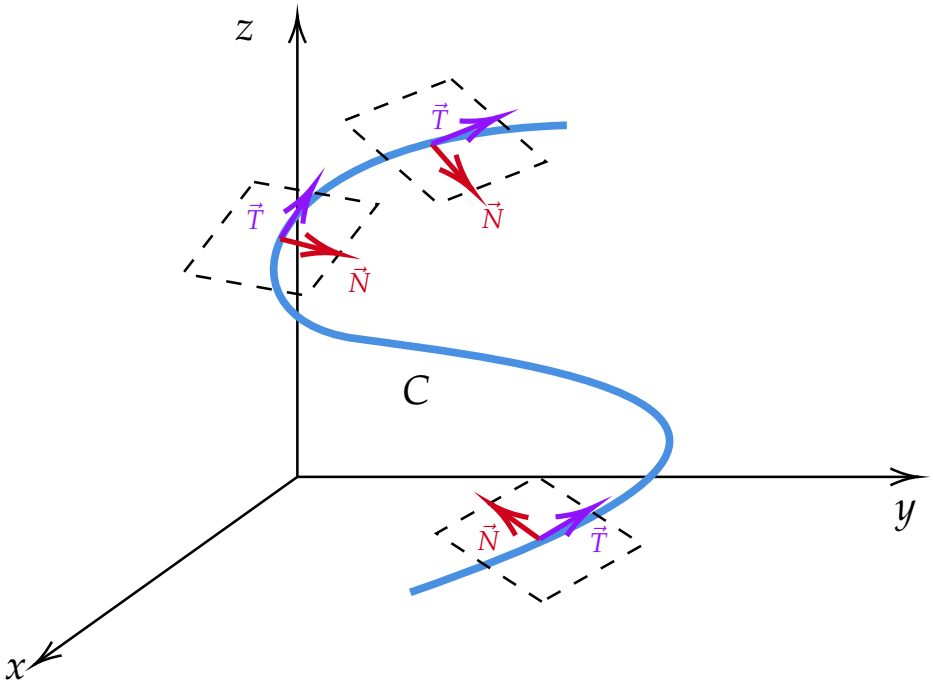
Quando uma partícula se move ao longo de uma curva, o vetor correspondente, $\vec{T}(t)$, sendo de comprimento unitário, muda somente de direção. A variação de direção de $\vec{T}(t)$ é medida por sua derivada, $\vec{T}'(t)$. Uma vez que $\vec{T}(t)$ tem comprimento constante, pela **Proposição 8** aplicada a $\sigma = \vec{T} : I \to \mathbb{R}^3$, segue que para todo $t \in I$ vale:

$$\langle \vec{T}(t), \vec{T}'(t) \rangle = 0$$

Sempre que $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, o vetor unitário na direção de $\vec{T}'(t)$ é chamado **vetor normal principal**, e é dado por:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \tag{8}$$

A figura a seguir mostra os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ em diferentes pontos da curva C, bem como os planos definidos por estes vetores:



O teorema a seguir mostra que o vetor aceleração, $\vec{a}(t)$, é a soma de dois vetores, um paralelo a $\vec{T}(t)$ e outro paralelo a $\vec{T}'(t)$.

Teorema 36. *Considere uma partícula se movendo com vetor posição $\sigma(t)$. Se $v(t) = \|\sigma'(t)\| \neq 0$ é a velocidade da partícula, então o vetor aceleração, $\vec{a}(t)$ é dado pela fórmula:*

$$\vec{a}(t) = v'(t) \cdot \vec{T}(t) + v(t) \cdot \vec{T}'(t) \tag{9}$$

Se $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, temos:

$$\vec{a}(t) = v'(t) \cdot \vec{T}(t) + v(t) \cdot \|\vec{T}'(t)\| \cdot \vec{N}(t) \tag{10}$$

Demonstração. De (7), segue que:

$$\sigma'(t) = \|\sigma'(t)\| \cdot \vec{T}(t) = v(t) \cdot \vec{T}(t)$$

Derivando ambos os membros da equação acima, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(\sigma'(t)) = \frac{d}{dt}(v(t) \cdot \vec{T}(t))$$

$$\sigma''(t) = \vec{a}(t) = v'(t) \cdot \vec{T}(t) + v(t) \cdot \vec{T}'(t),$$

o que prova (9). A fim de provar (10), usamos (8) para escrever:

$$\vec{T}'(t) = \|\vec{T}'(t)\| \cdot \vec{N}(t),$$

e subtituímos em (9):

$$\vec{a}(t) = v'(t) \cdot \vec{T}(t) + v(t) \cdot \vec{T}'(t) = v'(t) \cdot \vec{T}(t) + v(t) \cdot \|\vec{T}'(t)\| \cdot \vec{N}(t),$$

o que prova (10). □

O teorema acima nos mostra que:

$$\vec{a}(t) = v'(t) \cdot \vec{T}(t) + v(t) \cdot \|\vec{T}'(t)\| \cdot \vec{N}(t) \in \langle\{\vec{T}(t), \vec{N}(t)\}\rangle$$

ou seja, que $\vec{a}(t)$ sempre está no plano definido pelos vetores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$. Os coeficientes de $\vec{T}(t)$ e de $\vec{N}(t)$ em (10) são chamados, respectivamente, de **componente tangencial da aceleração** ($a_T(t) = v'(t)$) e **componente normal da aceleração** ($a_N(t) = v(t) \cdot \|\vec{T}'(t)\|$).

$$\vec{a}(t) = \overbrace{v'(t)}^{=a_T(t)} \cdot \vec{T}(t) + \overbrace{v(t) \cdot \|\vec{T}'(t)\|}^{=a_N(t)} \cdot \vec{N}(t)$$

A taxa de variação da velocidade, $v'(t)$, contribui com a componente tangencial, enquanto a taxa de variação da direção,$\|\vec{T}'(t)\|$, contribui com a componente normal.

Este resultado corrobora o fato bem conhecido de que um motorista deve reduzir a velocidade do carro ao fazer uma curva fechada.

Para uma curva plana, o comprimento do vetor $\vec{T}'(t)$ é a medida da taxa de variação do ângulo entre $\vec{T}(t)$ e a horizontal.

De fato, como $\vec{T}(t)$ é unitário, podemos escrever:

$$\vec{T}(t) = (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t))),$$

onde $\alpha(t)$ denota o ângulo entre $\vec{T}(t)$ e o eixo positivo dos xx, como mostra a figura a seguir:
A derivada de $\vec{T}(t)$ é:

$$\vec{T}'(t) = (-\alpha'(t) \cdot \sin(\alpha(t)), \alpha'(t) \cdot \cos(\alpha(t))) = \alpha'(t) \cdot \vec{u}(t), \tag{11}$$

onde:

$$\vec{u}(t) = (-\sin(\alpha(t)), \cos(\alpha(t))) = \left(\cos\left(\alpha(t) + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha(t) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Desta forma,

$$\|\vec{T}'(t)\| = \|\alpha'(t) \cdot \vec{u}(t)\| = |\alpha'(t)| \cdot \|\vec{u}(t)\| = |\alpha'(t)|,$$

o que mostra que $\|\vec{T}'(t)\|$ é o valor absoluto da taxa de variação do ângulo de inclinação que $\vec{T}(t)$ faz com a horizontal.

Note, além disso, que:

$$\langle \vec{T}(t), \vec{u}(t) \rangle = \langle (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t))), (-\sin(\alpha(t)), \cos(\alpha(t))) \rangle =$$
$$\cos(\alpha(t)) \cdot (-\sin(\alpha(t))) + \sin(\alpha(t)) \cdot \cos(\alpha(t)) = 0,$$

ou seja, $\vec{T}(t) \perp \vec{u}(t)$.

Assim, se $\alpha'(t) > 0$ (ou seja, se o ângulo que $\vec{T}(t)$ faz com a reta horizontal está crescendo), segue que (11) que $\vec{T}'(t)$ e $\vec{u}(t)$ são paralelos, e como ambos são unitários, segue que $\vec{N}(t) = \vec{u}(t)$.

Se $\alpha'(t) < 0$ (ou seja, se o ângulo que $\vec{T}(t)$ faz com a horizontal está decrescendo), $\vec{u}(t)$ e $\vec{T}'(t)$ são antiparalelos, e como ambos são unitários, tem-se $\vec{N}(t) = -\vec{u}(t)$. Isto nos mostra

que $\vec{N}(t)$ *sempre aponta para o lado côncavo da curva*.

4.3 Curvatura de uma Curva Plana

A **curvatura** de uma curva é, a grosso modo, a **medida da taxa de variação de sua direção**, tomando esta variação com respeito ao comprimento de arco, e não em relação ao parâmetro. Se s representa o comprimento de arco medido a partir de um certo ponto fixado, então a curvatura, κ, é dada por:

$$\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| \tag{12}$$

Pela **Regra da Cadeia**,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{T}'(t)}{v(t)},$$

sempre que $v(t) \neq 0$.

Portanto, podemos reescrever (12) como:

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{v(t)} \tag{13}$$

Quando a curva é plana e tem equação cartesiana $y = f(x)$, podemos parametrizar a curva por:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathrm{dom}\,(f) \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t, f(t)) \end{array}$$

de modo que:

$$\sigma'(t) = \big(1, f'(t)\big)$$

$$v(t) = \|\sigma'(t)\| = \|(1, f'(t))\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + f'(t)^2}}, \frac{f'(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \right)$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \right), \frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}} \right) \right) = \left(-\frac{f'(t) \cdot f''(t)}{\sqrt{(1 + f'(t)^2)^3}}, \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + f'(t)^2)^3}} \right)$$

$$\left\|\frac{d\vec{T}}{dt}(t)\right\| = \sqrt{\left(-\frac{f'(t)\cdot f''(t)}{\sqrt{(1+f'(t)^2)^3}}\right)^2 + \left(\frac{f''(t)}{\sqrt{(1+f'(t)^2)^3}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{f'(t)^2\cdot f''(t)^2 + f''(t)^2}{(1+f'(t)^2)^3}} = \sqrt{\frac{f''(t)^2\cdot(1+f''(t)^2)}{(1+f'(t)^2)^3}} = |f''(t)|\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+f'(t)^2)^2}}$$

Portanto,

$$\kappa(t) = \frac{\frac{|f''(t)|}{1+f'(t)^2}}{\sqrt{1+f'(t)^2}} = \frac{|f''(t)|}{(1+f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Substituindo t por x, (13) se escreve, portanto:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1+(f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{14}$$

Assim, a curvatura do gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$ é dada por (14).

Exemplo 37. *Determinar a curvatura da circunferência parametrizada por:*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (a\cdot\cos(t), a\cdot\sin(t)) \end{array}$$

Solução: Temos:

$$\sigma'(t) = (-a\cdot\sin(t), a\cdot\cos(t)) \text{ e } v(t) = \|\sigma'(t)\| = a,$$

de modo que:

$$\vec{T}(t) = \frac{\sigma'(t)}{v(t)} = \frac{(a\cdot\cos(t), a\cdot\sin(t))}{a} = (\cos(t), \sin(t))$$

e:

$$\vec{T}'(t) = (-\cos(t), \sin(t))$$

Assim, temos, por (12),

$$\kappa(t) = \frac{\|(-\cos(t), -\sin(t))\|}{a} = \frac{1}{a}.$$

Desta forma, a circunferência de raio $a > 0$ tem curvatura constante e igual a $1/a$. O inverso da curvatura é o raio da circunferência.

Consideremos uma curva plana parametrizada, (C, σ) e um ponto $P \in C$ tal que existe $\kappa(t)$ e $\kappa(t) \neq 0$. O **raio de curvatura de** (C, σ) **em** P é:

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$$

O círculo passando por P, de raio $\rho(t)$ e cujo centro está na semirreta normal que contém $\vec{N}(t)$ é chamado **círculo osculador**. Tal círculo é tangente à curva C em P e tem a mesma curvatura naquele ponto.[1]

Exemplo 38. *Encontrar e traçar o círculo osculador da parábola $y = x^2$ na origem.*

Solução: Temos $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$, de modo que a curvatura desta parábola em x é:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|2|}{[1 + (2x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{[1 + 4x^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Assim, temos:

$$\kappa(0) = \frac{2}{[1 + 4 \cdot 0^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1} = 2 \neq 0$$

e portanto:

$$\rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{1}{2},$$

de modo que o raio do círculo osculador será $1/2$.

Precisamos, agora, encontrar o vetor normal.

Parametrizamos a parábola usando $t = x$, e obtemos:

$$\sigma(t) = (t, t^2), t \in \mathbb{R}$$

Calculamos:

$$\sigma'(t) = (1, 2t) \text{ de modo que } \|\sigma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

e portanto:

$$\vec{T}(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} = \frac{(1, 2t)}{\sqrt{1 + 4t^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right)$$

de modo que:

[1] http://www.grad.hr/geomteh3d/skripta/zakrivljenost_eng.html

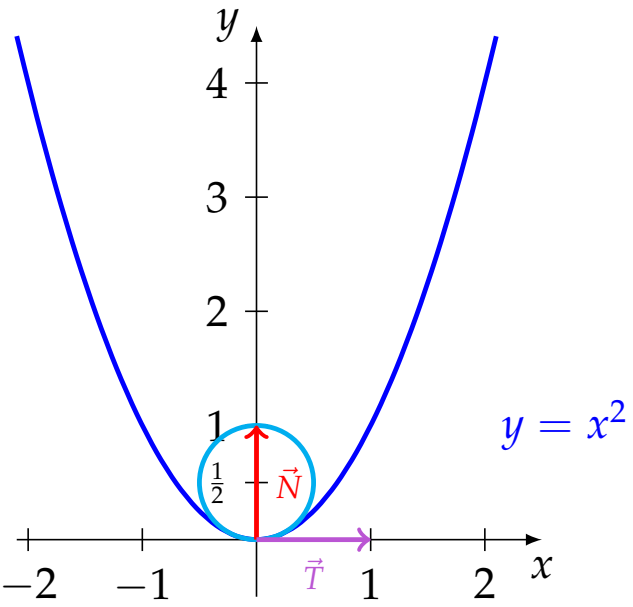
$$\vec{T}'(t) = \left(-\frac{4t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\|\vec{T}'(t)\| = \frac{2}{(1+4t^2)^2}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \left(-2t \cdot \sqrt{1+4t^2}, \sqrt{1+4t^2} \right)$$

e o vetor unitário normal em $t = 0$ é:

$$\vec{N}(0) = (-2 \cdot 0 \cdot \sqrt{1+4 \cdot 0^2}, \sqrt{1+4 \cdot 0^2}) = (0,1)$$



Desta forma, o círculo osculador terá centro em $(0, 1/2)$ e raio $1/2$ – e portanto equação:

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Referências

[1] Pinto, D., Morgado, M.C.F. *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*, Editora UFRJ, 2014.

[2] Finney, Ross L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo:
Addison Wesley, 2003.

[3] Torres, V., Gomes da Silva, M. *Experimento: confeccionando e verificando que a curva ciclóide apresenta o menor tempo entre dois pontos desnivelados*. In Experiências em Ensino de Ciências, Vol. 15, n. 3, 2020. Disponível em https://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID766/v15_n3_a2020.pdf.