

MAT0030 - GEOMETRIA DIFERENCIAL

AGENDA 03

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Nesta agenda vamos lidar com o conceito de superfície diferenciável. Veremos que um dos modos de se definir uma superfície em $\mathbb{R}^3$ é como um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ com certas propriedades, ou seja, uma certa coleção de pontos de $\mathbb{R}^3$. Devemos certamente requerer que uma superfície seja “suave” e bidimensional em algum sentido. Essas exigências serão expressas em termos matemáticos fazendo uso do conceito de diferenciabilidade.

Neste texto apresentaremos um estudo introdutório das superfícies diferenciáveis regulares, analisando sua geometria por meio da primeira forma fundamental, apresentando conceitos básicos como os de curvatura normal, linhas de curvatura, curvas principais, linhas assintóticas e curvas geodésicas. Encerramos apresentando uma demonstração do **Teorema Egrégio de Gauss**.

1 Preliminares

Para um melhor aproveitamento do material que segue, são necessários alguns conhecimentos a respeito do Cálculo Diferencial de funções de duas variáveis reais com valores em $\mathbb{R}^3$. Apresentamos, assim, nesta primeira seção, um apanhado com os principais resultados, em benefício do leitor.

1.1 Diferenciabilidade de Transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$

Motivação: Seja $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in]a, b[$. Dizemos que f é **diferenciável em** x_0 se o limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot h}{h}$$

existe, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:

*j.berni@unesp.br

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - c \cdot h}{h} = 0,$$

ou ainda, se para $h \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 + h \in]a, b[$ tivermos:

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - c \cdot h$$

e

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + c \cdot h + r(h) \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

e dizemos que c é a **derivada de f em x_0** , a qual denotamos por $f'(x_0)$. Isto quer dizer que, em uma vizinhança de x_0 , a função incremento:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto f(x_0 + h) - f(x_0) \end{aligned}$$

possui “**uma boa aproximação linear**”. Nosso propósito, agora, será estender estes conceitos para funções:

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

com $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto.

Definição 1 Seja $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função com $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Dizemos que φ é **diferenciável em $p_0 = (u_0, v_0) \in U$** se a função incremento de φ admitir uma boa aproximação linear em uma vizinhança de p_0 . Mais precisamente, dizemos que φ é diferenciável em $p_0 \in U$ quando existir uma transformação linear, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para todo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(u_0, v_0) + (h, k) \in U$ tivermos:

$$\varphi(u_0 + h, v_0 + k) = \varphi(u_0, v_0) + T \cdot (h, k) + r(h, k) \quad (1)$$

com

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = (0,0,0)$$

Em (1), $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ é suficientemente pequeno para que $(u_0 + h, v_0 + k) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. Como U é aberto e $(u_0, v_0) \in U$, certamente existe $\delta = \delta(u_0, v_0) > 0$ tal que $B((u_0, v_0), \delta) \subseteq U$, de modo que $\|(h, k)\| < \delta$ implica $(u_0 + h, v_0 + k) \in U$.

Às vezes é útil reescrever a **Definição 1** da seguinte forma:

“ φ é diferenciável em $(u_0, v_0) \in U$ quando existir uma transformação linear, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para todo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(u_0 + h, v_0 + k) \in U$ tivermos:

$$\varphi(u_0 + h, v_0 + k) = \varphi(u_0, v_0) + T \cdot (h, k) + \rho(h, k) \cdot \|(h, k)\|, \text{ com } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \rho(h, k) = (0, 0)$$

Para isto, basta tomarmos $\rho(h, k) = \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|}$.

Observação 2 Observe que r , da equação (1) está definida para $(h, k) \in B((0, 0), \delta)$, para δ suficientemente pequeno. No entanto, ρ só está definida em $B((0, 0), \delta) \setminus \{(0, 0)\}$. Quando f é diferenciável em (u_0, v_0) , no entanto, podemos definir $\rho(0, 0) := (0, 0)$, e como $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \rho(h, k) = (0, 0)$, segue que ρ será contínua em $B((0, 0), \delta)$.

Suponhamos que $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja diferenciável em $(u_0, v_0) \in U$. Queremos checar a unicidade da tal da “boa transformação linear” T dada na **Definição 1**.

Seja $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ um vetor não nulo qualquer, porém fixado. Para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suficientemente pequeno, tem-se:

$$\begin{aligned} T \cdot (h, k) &= \frac{t}{t} \cdot T \cdot (h, k) = \frac{T(t \cdot (h, k))}{t} = \frac{\varphi((u_0, v_0) + t \cdot (h, k)) - \varphi(u_0, v_0) - r(t \cdot (h, k))}{t} = \\ &= \frac{\varphi((u_0, v_0) + t \cdot (h, k)) - \varphi(u_0, v_0)}{t} - \frac{r(t \cdot h, t \cdot k)}{\|t \cdot (h, k)\|} \cdot \frac{\|t \cdot (h, k)\|}{t} = \\ &= \frac{\varphi(u_0 + t \cdot h, v_0 + t \cdot k) - \varphi(u_0, v_0)}{t} - \frac{r(t \cdot h, t \cdot k)}{\|t \cdot (h, k)\|} \cdot \frac{|t| \cdot \|(h, k)\|}{t} \end{aligned}$$

Tomando o limite conforme $t \rightarrow 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} T \cdot (h, k) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(u_0 + t \cdot h, v_0 + t \cdot k) - \varphi(u_0, v_0)}{t} - \frac{r(t \cdot h, t \cdot k)}{\|t \cdot (h, k)\|} \cdot \frac{|t| \cdot \|(h, k)\|}{t} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_0 + t \cdot h, v_0 + t \cdot k) - \varphi(u_0, v_0)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t \cdot h, t \cdot k)}{\|(t \cdot h, t \cdot k)\|} \cdot \frac{|t| \cdot \|(h, k)\|}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_0 + t \cdot h, v_0 + t \cdot k) - \varphi(u_0, v_0)}{t} \end{aligned}$$

pois

$$\lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{r(t \cdot h, t \cdot k)}{\|t \cdot (h, k)\|}}_{\rightarrow 0} \cdot \overbrace{\frac{|t| \cdot \|(h, k)\|}{t}}^{\text{limitada}} = (0, 0, 0)$$

Obtemos, assim, a expressão:

$$T \cdot (h, k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_0 + t \cdot h, v_0 + t \cdot k) - \varphi(u_0, v_0)}{t} \quad (2)$$

A equação (2) é única devido à unicidade do limite de funções com contradomínio em $\mathbb{R}^3$. Note que $T \cdot (0, 0) = (0, 0, 0)$, de modo que temos:

$$T \cdot (h, k) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_0 + t \cdot h, v_0 + t \cdot k) - \varphi(u_0, v_0)}{t}, & \text{se } (h, k) \neq (0, 0) \\ (0, 0, 0), & \text{se } (h, k) = (0, 0). \end{cases}$$

Assim, podemos enunciar a seguinte:

Definição 3 Sejam $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função com $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto diferenciável em $(u_0, v_0) \in U$. A transformação:

$$\begin{aligned} d\varphi(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ h &\mapsto \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_0 + t \cdot h, v_0 + t \cdot k) - \varphi(u_0, v_0)}{t}, & \text{se } (h, k) \neq (0, 0) \\ (0, 0, 0), & \text{se } (h, k) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

é a diferencial de φ em (u_0, v_0) . Escrevemos, então:

$$\varphi(u_0 + h, v_0 + k) = \varphi(u_0, v_0) + d\varphi(u_0, v_0) \cdot (h, k) + r(h, k), \text{ com}$$

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = (0, 0, 0).$$

Teorema 4 (Unicidade da Diferencial) Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $(u_0, v_0) \in U$ e $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação diferenciável em (u_0, v_0) , e sejam $S_1, S_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que para todo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(u_0 + h, v_0 + k) \in U$ tem-se:

$$\varphi(u_0 + h, v_0 + k) = \varphi(u_0, v_0) + S_1 \cdot (h, k) + r_1(h, k) \text{ com } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r_1(h, k)}{\|(h, k)\|} = (0, 0, 0)$$

e

$$\varphi(u_0 + h, v_0 + k) = \varphi(u_0, v_0) + S_2 \cdot (h, k) + r_2(h, k) \text{ com } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r_2(h, k)}{\|(h, k)\|} = (0, 0, 0)$$

Então $S_1 = S_2$.

Defina:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (h, k) &\mapsto S_1 \cdot (h, k) - S_2 \cdot (h, k) \end{aligned}$$

Mostremos que $S \equiv 0$, ou seja, que para todo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tem-se $S \cdot (h, k) = (0, 0, 0)$.

Caso 1: $(h, k) = (0, 0)$. Neste caso, como S é linear, temos imediatamente $S \cdot (0, 0) = (0, 0, 0)$.

Caso 2: $(h, k) \neq (0, 0)$. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} \frac{S \cdot (h, k)}{\|(h, k)\|} &= \frac{S_1 \cdot (h, k) - S_2 \cdot (h, k)}{\|(h, k)\|} = \\ &= \frac{\overbrace{(\varphi(u_0 + h, v_0 + k) - \varphi(u_0, v_0))}^{=r_2(h, k)} - \overbrace{(\varphi(u_0 + h, v_0 + k) - \varphi(u_0, v_0))}^{=r_1(h, k)} - S_2 \cdot (h, k) + S_1 \cdot (h, k)}{\|(h, k)\|} = \\ &= \frac{r_2(h, k)}{\|(h, k)\|} - \frac{r_1(h, k)}{\|(h, k)\|} \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S \cdot (h, k)}{\|(h, k)\|} = (0, 0, 0)$. Considere $t > 0$, de modo que vale:

$$\frac{S \cdot (th, tk)}{\|(th, tk)\|} = \frac{S \cdot (h, k)}{\|(h, k)\|}$$

Assim,

$$\frac{S \cdot (h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{S \cdot (h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{S \cdot (th, tk)}{\|(th, tk)\|} = (0, 0, 0)$$

Desta forma, para todo $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ temos:

$$\frac{S \cdot (h, k)}{\|(h, k)\|} = (0, 0, 0)$$

e portanto $(\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2)(S \cdot (h, k) = (0, 0, 0))$. Segue, portanto, que $S_1 = S_2$, como queríamos.

2 A Diferencial de Uma Função de 2 Variáveis com Valores em $\mathbb{R}^3$ e a Matriz Jacobiana

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $(u_0, v_0) \in U$ e $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável em (u_0, v_0) . Se escrevermos $\varphi(u_0, v_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$, para a base canônica $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, temos:

$$d\varphi(u_0, v_0) \cdot (1, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_0 + t \cdot 1, v_0 + t \cdot 0) - \varphi(u_0, v_0)}{t}$$

$$d\varphi(u_0, v_0) \cdot (0, 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_0 + t \cdot 0, v_0 + t \cdot 1) - \varphi(u_0, v_0)}{t}$$

que denominamos - quando o limite existir - **a derivada parcial de φ em relação a $(1, 0)$ em (u_0, v_0) e a derivada parcial de φ em relação a $(0, 1)$ em (u_0, v_0) .**

Notação: $d\varphi(u_0, v_0) \cdot (1, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u_0, v_0)$ e $d\varphi(u_0, v_0) \cdot (0, 1) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(u_0, v_0)$.

Assim,

$$d\varphi(u_0, v_0) \cdot (1, 0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right).$$

$$d\varphi(u_0, v_0) \cdot (0, 1) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

Como já vimos, $d\varphi(u_0, v_0)$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, de modo que pode ser representada, com respeito às bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ por uma certa matriz. Esta matriz é dada na:

Definição 5 Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $(u_0, v_0) \in U$ e $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável em (u_0, v_0) , de modo que existe “a boa transformação linear, $d\varphi(u_0, v_0)$, que aproxima φ em uma vizinhança de (u_0, v_0) ”. Denotaremos por $J\varphi(u_0, v_0) \in M(2 \times 3, \mathbb{R})$ a matriz que representa $d\varphi(u_0, v_0)$ com respeito às bases canônicas, denominando-a **a matriz jacobiana de φ em (u_0, v_0)** . Portanto:

$$J\varphi(P_0) = [d\varphi(u_0, v_0)]_{\{(1,0),(0,1)\}}^{\{(1,0),(0,1)\}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

Também é usual denotarmos a matriz jacobiana dada acima por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Exemplo 6 Consideremos a função:

$$\begin{aligned} \varphi : B((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}) \end{aligned}$$

Neste exemplo, as funções coordenadas são:

$$\begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = \sqrt{1-u^2-v^2} \end{cases}$$

Dado $(u_0, v_0) \in B((0,0),1)$, temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) = -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2-v_0^2}} \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = 1 \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) = -\frac{v_0}{\sqrt{1-u_0^2-v_0^2}} \end{cases}$$

E portanto a diferencial de φ em (u_0, v_0) é a transformação linear:

$$d\varphi(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(h, k) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2-v_0^2}} & -\frac{v_0}{\sqrt{1-u_0^2-v_0^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$d\varphi(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(h, k) \mapsto \left(h, k, -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2-v_0^2}} \cdot h - \frac{v_0}{\sqrt{1-u_0^2-v_0^2}} \cdot k \right)$$

Definição 7 Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^3$ uma função cujas funções coordenadas são x, y . Dizemos que φ é **diferenciável em** $(u_0, v_0) \in U$ se, e somente se, cada função $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ for diferenciável em (u_0, v_0) . Também, se cada uma das funções acima for de classe C^∞ , dizemos que φ é de classe C^∞ .

3 Superfícies Regulares

A grosso modo, uma superfície regular pode ser entendida como um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que é localmente homeomorfo a abertos de $\mathbb{R}^2$ e que admite, em um sentido que tonaremos mais preciso posteriormente, uma estrutura de diferenciabilidade, de modo que possamos definir, em cada um de seus pontos, um “plano tangente”.

As superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ são, por assim dizer, obtidas por meio de uma “colagem compatível” de subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ homeomorfos a abertos do plano, de tal modo que a figura resultante não tenha nem “quinas” nem autointerseções.

Definição 8 (parametrização regular local) Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto qualquer. Uma **parametrização regular local** é uma função:

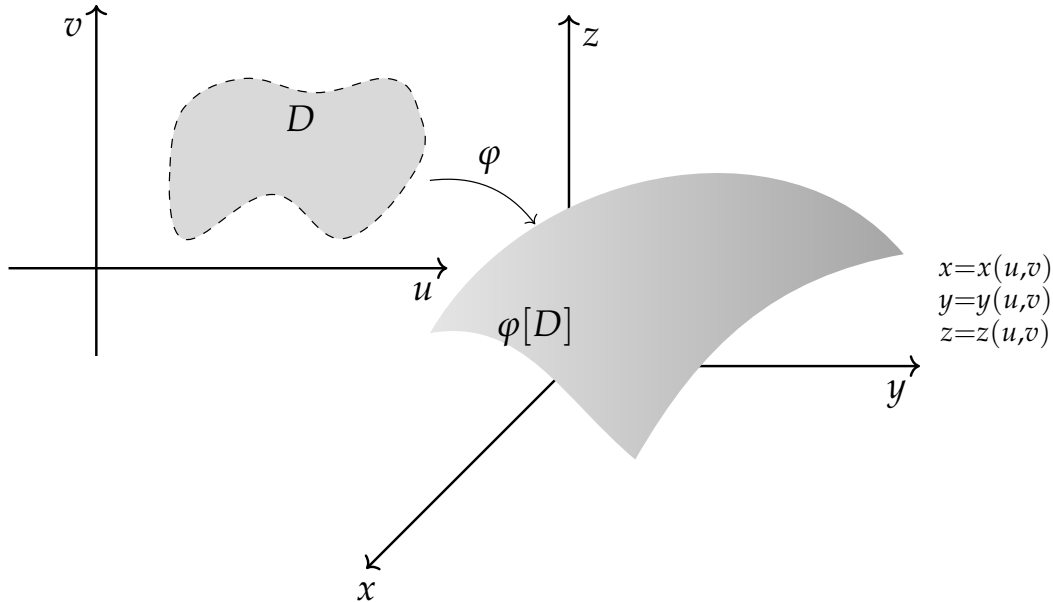
$$\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

injetora e de classe C^∞ , cuja diferencial em cada ponto $(u_0, v_0) \in D$, $d\phi(u_0, v_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem posto dois (ou seja, é injetora – a esta condição denominamos “regularidade”).

A imagem de um sistema de coordenadas local, $\phi[D]$, é o que entendemos por “subconjunto suave bidimensional de $\mathbb{R}^3$ ”. A exigência de que ϕ seja injetora garante que $\phi[D]$ não admite nenhuma auto-interseção, e a condição de regularidade (ou seja, da injetividade de

$d\varphi(u_0, v_0)$ para todo $(u_0, v_0) \in D$) garante que em cada ponto de $\varphi[D]$ teremos um plano tangente.



Representação pictórica de um sistema de coordenadas regular

Definição 9 (superfície regular parametrizada simples) Uma *superfície regular parametrizada simples* é um par $(S, \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3)$ em que $S \subset \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização regular local tal que $\varphi[D] = S$.

Exemplo 10 (parametrização de Monge) Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e:

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(u, v) \end{aligned}$$

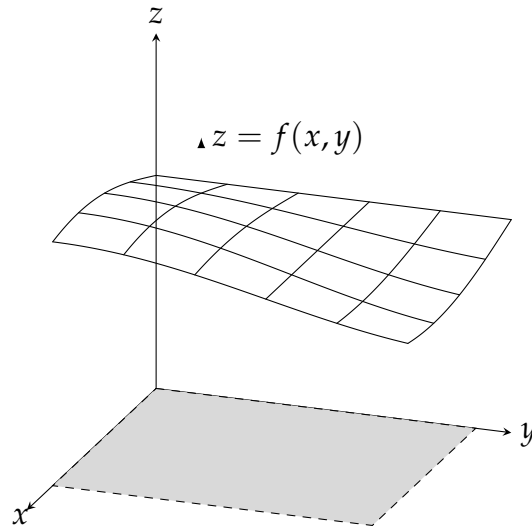
uma função de classe $C^\infty(D, \mathbb{R})$. Considere:

$$S = \text{Graf}(f) = \{(u, v, f(u, v)) \mid (u, v) \in D\}$$

e a função:

$$\begin{aligned} \phi : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

O par (S, ϕ) é uma superfície regular parametrizada simples.



É imediato verificar que:

$$\phi[D] = \{\phi(u, v) \mid (u, v) \in D\} = \{(u, v, f(u, v)) \mid (u, v) \in D\} = \text{Graf}(f) = S.$$

Assim, para verificar que (S, ϕ) é uma superfície regular parametrizada, resta verificar que:

1. ϕ é um bijetora: de fato, a função:

$$\begin{aligned} \psi : \quad S &\rightarrow D \\ (x, y, f(x, y)) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

é inversa de ϕ : dado qualquer $(u, v) \in D$, temos:

$$(\psi \circ \phi)(u, v) = \psi(\phi(u, v)) = \psi(u, v, f(u, v)) = (u, v) = \text{id}_D(u, v)$$

de modo que ϕ é injetora e ψ é sobrejetora; também, para qualquer $(x, y, z) \in S$, ou seja, (x, y, z) tal que $z = f(x, y)$, temos:

$$\begin{aligned} (\phi \circ \psi)(x, y, z) &= (\phi \circ \psi)(x, y, f(x, y)) = \phi(\psi(x, y, f(x, y))) = \phi(x, y) = \\ &= (x, y, f(x, y)) = (x, y, z) = \text{id}_S(x, y, z) \end{aligned}$$

e portanto ψ é injetora e ψ é sobrejetora.

Por serem simultaneamente injetoras e sobrejetoras, ϕ e ψ são bijeções, inversas uma da outra.

2. ϕ é contínua: de fato, cada uma das coordenadas de ϕ :

$$\begin{aligned} x : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(u, v) \end{aligned}$$

são todas contínuas.

3. ψ é contínua: de fato, cada uma das coordenadas de ψ :

$$\begin{aligned} u : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, f(x, y)) &\mapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, f(x, y)) &\mapsto y \end{aligned}$$

é contínua.

4. ϕ é de classe $\mathcal{C}^\infty(D, S)$: de fato, cada função coordenada de ϕ é de classe $\mathcal{C}^\infty(D)$.

5. ϕ é regular, no sentido de que sua diferencial é injetora em todos os pontos de D : de fato, para qualquer $(u_0, v_0) \in D$,

$$\text{pt} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix} = \text{pt} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix} = 2$$

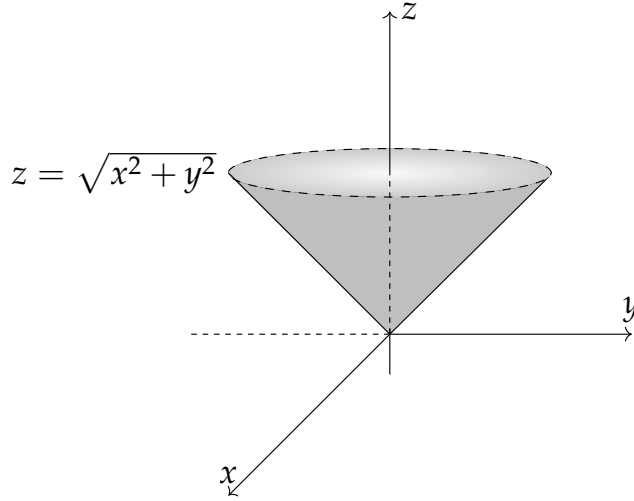
Isto tudo demonstra que $(S, \phi : D \rightarrow S)$ é uma superfície regular parametrizada simples.

Observação 11 Uma parametrização como a do exemplo acima é denominada uma **parametrização de Monge**.

Vejamos, a seguir, um exemplo de subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que é uma superfície parametrizada simples que *não é regular*.

Exemplo 12 Considere a superfície S do cone $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Esta superfície pode ser representada parametricamente por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}) \end{aligned}$$



De modo que $(S, \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S)$ é uma superfície parametrizada - que, no entanto, não é diferenciável em $(0, 0, 0)$. Note que S não é regular em $(0, 0, 0)$, pois a função coordenada z de φ , a saber $z(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$, não possui derivadas parciais em $(0, 0)$. Note que por não ser diferenciável em um de seus pontos, não é uma superfície regular parametrizada.

Parametrizemos S usando, agora, o fato de que se trata de uma superfície de revolução, obtida ao girar a semirreta $z = x, x \geq 0$, descrita por:

$$\begin{cases} x = t, t \geq 0 \\ z = t, t \geq 0 \end{cases}$$

em torno do eixo Oz . Temos:

$$\begin{aligned} \psi : [0, 2\pi] \times [0, \infty[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\mapsto (t \cdot \cos(\theta), t \cdot \sin(\theta), t) \end{aligned}$$

Note que $(S, \psi : [0, 2\pi] \times [0, \infty[\rightarrow S)$ tampouco é regular em $(0, 0, 0)$. De fato, o produto vetorial:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, t) \times \frac{\partial \psi}{\partial t}(\theta, t) = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -t \sin(\theta) & t \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{pmatrix} = (t \cos(\theta), t \sin(\theta), -t)$$

é nulo em $(0, 0)$, apesar de as funções $x = x(\theta, t)$, $y = y(\theta, t)$ e $z = z(\theta, t)$ serem de classe C^1 .

3.1 Superfícies Regulares

Nem todas as superfícies que desejamos estudar podem ser parametrizadas por uma única função. A esfera $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é um exemplo de superfície que não é gráfico de nenhuma função suave. Por isto, convém introduzir uma definição um pouco mais abrangente:

Definição 13 (superfície regular) *Uma superfície regular é um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para qualquer ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, existe um sistema regular de coordenadas locais:*

$$\begin{aligned} \varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

tal que $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \varphi[D]$.

Assim, um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, e somente se, cada um de seus pontos admitir uma vizinhança aberta que é imagem de alguma parametrização regular local:

A seguinte proposição nos permite apresentar inúmeros exemplos de superfícies:

Proposição 14 (Teorema da Pré-Imagem) *Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $c \in \mathbb{R}$. Se para qualquer $(x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}[\{c\}]$ tivermos:*

$$\begin{aligned} df_{(x_0, y_0, z_0)} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2, h_3) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot h_3 \end{aligned}$$

diferente de zero, então:

$$f^{-1}[\{c\}] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}$$

é uma superfície regular parametrizada.

Observamos que a hipótese de que para todo $(x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}[\{c\}]$, $df_{(x_0, y_0, z_0)}$ é diferente de zero corresponde a afirmar que pelo menos uma das derivadas parciais é diferente de zero. Sem perda de generalidade, vamos supor que $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Pelo **Teorema da Função Implícita**, existe um subconjunto aberto de $f^{-1}[\{c\}]$ contendo (x_0, y_0, z_0) , digamos U , e uma função

$$\begin{aligned}\xi : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \xi(u, v)\end{aligned}$$

tal que:

$$(\forall (u, v) \in U)(f(u, v, \xi(u, v)) = c)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\phi : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, \xi(u, v))\end{aligned}$$

é um sistema de coordenadas local regular para uma vizinhança de (x_0, y_0, z_0) . Segue, por definição, que $f^{-1}[\{c\}]$ é uma superfície regular.

Exemplo 15 *A esfera:*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular.

De fato, considere a função:

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2\end{aligned}$$

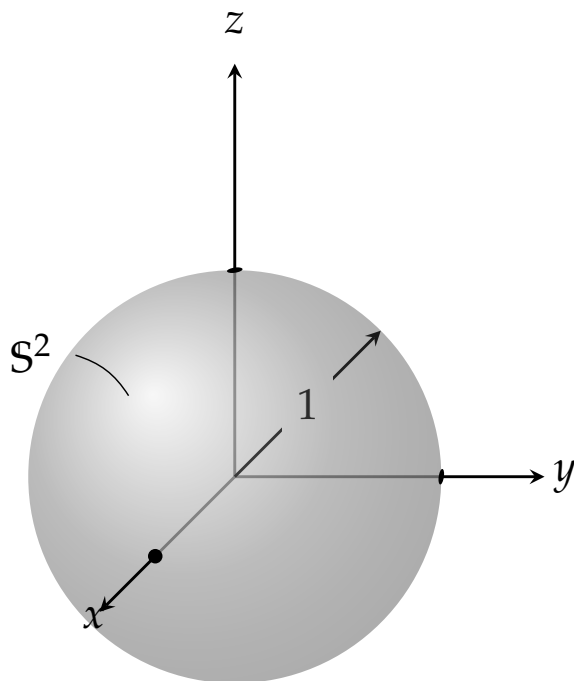
que tem como diferencial em um ponto $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ a função:

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2\end{aligned}$$

Dado $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$, tem-se $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \neq 0$, ou seja, pelo menos uma das coordenadas é diferente de zero. Desta forma:

$$\begin{aligned}df(x_0, y_0, z_0) : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2, h_3) &\mapsto 2x_0 \cdot h_1 + 2y_0 \cdot h_2 + 2z_0 \cdot h_3\end{aligned}$$

é uma transformação linear não-nula. Segue do **Teorema da Pré-Imagem** que S^2 é uma superfície regular.



Exemplo 16 Sejam $a, b, c > 0$. O elipsoide:

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

é uma superfície regular. De fato, considere a função:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \end{aligned}$$

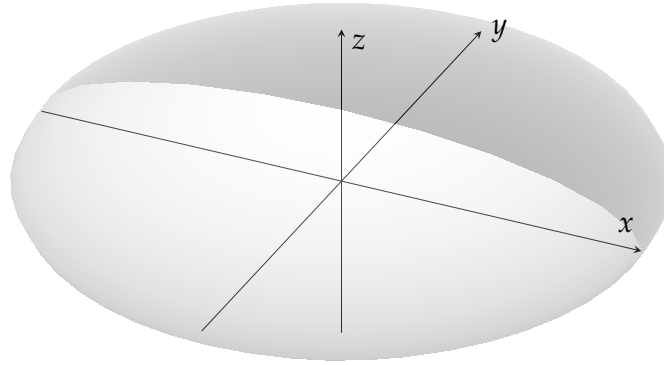
que tem como diferencial em um ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ a função:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

Dado $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$, tem-se $b^2c^2x_0^2 + a^2c^2y_0^2 + a^2b^2z_0^2 = a^2b^2c^2 \neq 0$, o que implica $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 0$, isto é, pelo menos uma das coordenadas é diferente de zero. Desta forma:

$$\begin{aligned} df(x_0, y_0, z_0) : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2, h_3) &\mapsto \frac{2x_0}{a^2} \cdot h_1 + \frac{2y_0}{b^2} \cdot h_2 + \frac{2z_0}{c^2} \cdot h_3 \end{aligned}$$

é uma transformação linear não-nula. Segue do **Teorema da Pré-Imagem** que $\mathcal{E}$ é uma superfície regular.



3.2 Superfícies de Revolução

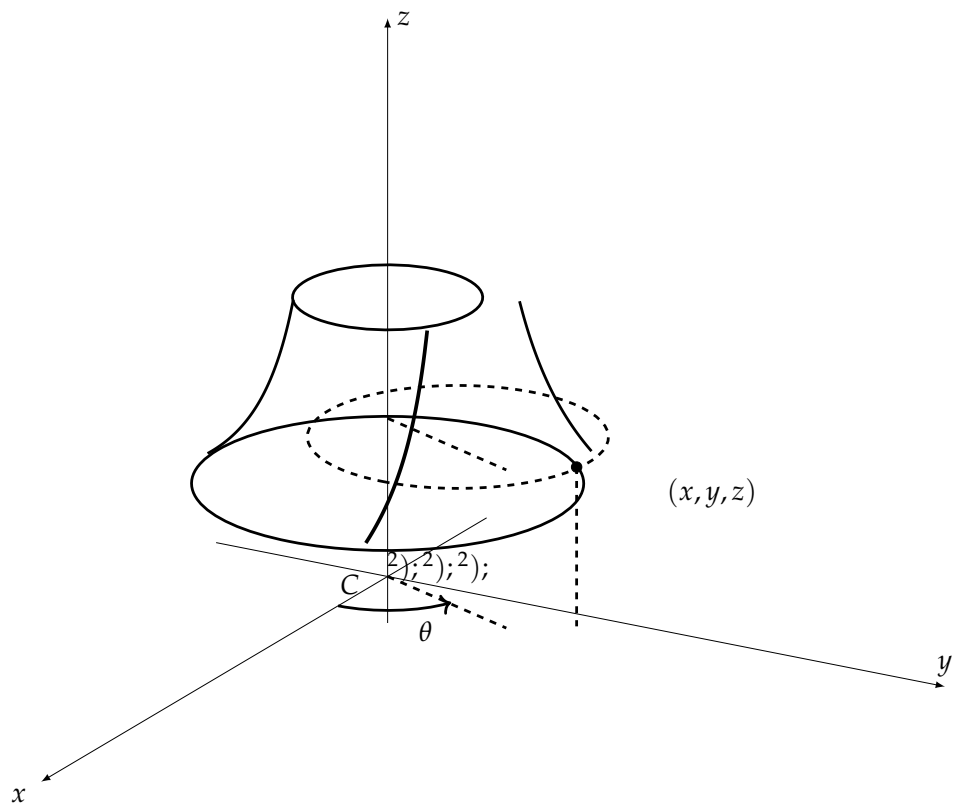
Considere a superfície S , obtida girando-se uma curva suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ regular no plano Oxz em torno do eixo Oz . Se α tem equações paramétricas:

$$\begin{aligned} \alpha : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), 0, z(t)) \end{aligned}$$

em que $(\forall t \in [a, b])(x(t) \geq 0)$, a superfície de revolução S assim gerada é uma superfície regular S , que admite, no entorno de cada um de seus pontos uma parametrização (ou sistema regular de coordenadas locais):

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\mapsto (x(t) \cos(\theta), x(t) \sin(\theta), z(t)) \end{aligned}$$

Os parâmetros t e θ podem ser interpretados do seguinte modo: se $P = (x, y, z) \in S$, então P pertence a alguma circunferência de centro no eixo Oz e raio igual a $x(t)$ para algum t , $a \leq t \leq b$, cuja distância ao plano Oxy é $z(t)$. O parâmetro θ representa o ângulo das coordenadas polares da projeção de P no plano Oxy , conforme ilustrado a seguir:



Consideremos o toro, obtido pela revolução da circunferência de equação:

$$(x - 1)^2 + (z - 1)^2 = \frac{1}{4}$$

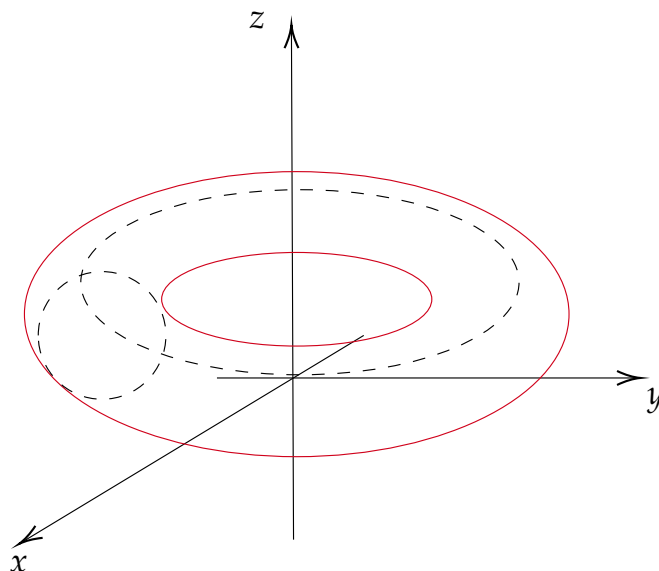
em torno do eixo Oz . Vamos obter um sistema regular de coordenadas locais para esse toro.

Primeiramente parametrizamos a curva do plano Oxz :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(t), t \in [0, 2\pi] \\ z(t) = 1 + \frac{1}{2} \sin(t), t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

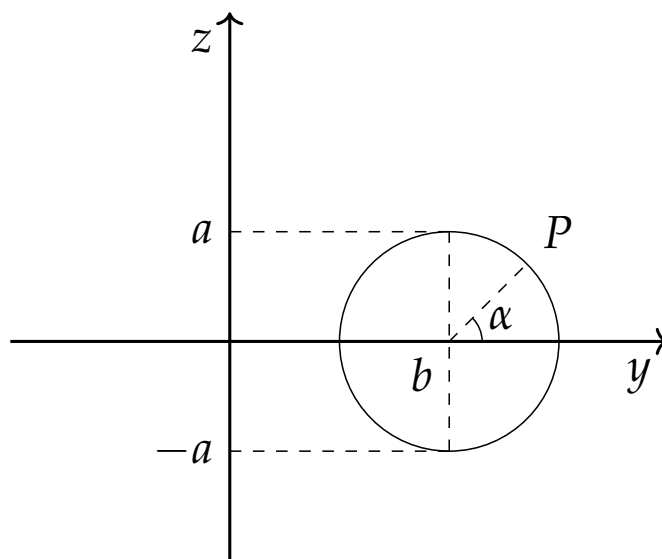
A superfície de revolução obtida ao girar esta curva em torno do eixo Oz pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\mapsto \left((1 + \frac{1}{2} \cos(t)) \cos(\theta), (1 + \frac{1}{2} \cos(t)) \sin(\theta), 1 + \frac{1}{2} \sin(t) \right) \end{aligned}$$



Exemplo 17 Determinemos uma representação paramétrica do toro obtido girando em torno do eixo Oz o círculo do plano Oxy com centro em $(b, 0, 0)$ e raio $a < b$. Sugestão: tome como parâmetros os ângulos θ e α mostrados na figura.

Solução: Vemos que se trata de uma superfície de revolução obtida da rotação da circunferência de centro em $(b, 0)$ e raio a no plano Oyz , como ilustra a figura:



A circunferência pode ser representada parametricamente por:

$$\begin{cases} y(\alpha) = b + a \cdot \cos(\alpha), \alpha \in [0, 2\pi], \\ z(\alpha) = a \cdot \sin(\alpha), \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Assim, como se trata de uma superfície de revolução, este toro pode ser parametrizado por:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \theta) &\mapsto ((b + a \cdot \cos(\alpha)) \cdot \cos(\theta), (b + a \cdot \cos(\alpha)) \cdot \sin(\theta), a \cdot \sin(\alpha)) \end{aligned}$$

ou seja, para cada $(\alpha, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ tem-se:

$$\varphi(\alpha, \theta) = (b \cdot \cos(\theta) + a \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta), b \cdot \sin(\theta) + a \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta), a \cdot \sin(\alpha))$$

Exemplo 18 (pseudoesfera) Consideremos a superfície de revolução obtida a partir da tratriz com respeito ao eixo Oy :

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\sin(t), \ln(\tan(t/2)) + \cos(t)) \end{aligned}$$

Obtemos a seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\mapsto (\sin(t) \cdot \cos(\theta), \sin(t) \cdot \sin(\theta), \ln(\tan(t/2)) + \cos(t)) \end{aligned}$$

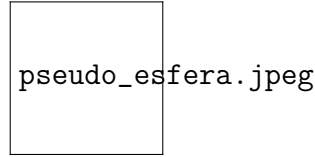


Figure 1: Pseudo-esfera

Exemplo 19 Uma **superfície regrada** é uma superfície que pode ser obtida pelo rastro de uma reta L que se move ao longo de uma curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. As várias posições da reta geratriz são chamadas de **regramentos** da superfície. Tais superfícies sempre admitem um sistema regular de coordenadas locais regrado:

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \beta(u) + v \cdot \delta(u) \end{aligned}$$

em que $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é uma aplicação de classe C^∞ .

4 Funções Diferenciáveis e Vetores Tangentes

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um sistema regular de coordenadas locais em S , então a função composta:

$$\begin{array}{ccc} \varphi[D] \subset S & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \varphi \uparrow & \nearrow f \circ \varphi & \\ D \subset \mathbb{R}^2 & & \end{array}$$

é denominada uma **expressão coordenada para f** ; note que:

$$f \circ \varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

é simplesmente uma função de um aberto de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

Definição 20 Sejam S uma superfície regular e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **diferenciável em** $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ se para todas as parametrizações regulares locais para S , $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, tais que $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \varphi[D]$ tivermos $f \circ \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(u_0, v_0) = \varphi^{-1}(p_0) = \varphi^{-1}(x_0, y_0, z_0)$

Sejam S uma superfície regular e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow S$. Cada sistema regular de coordenadas locais de S , $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ nos dá uma função:

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}[\varphi[D]] \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} & \varphi[D] \subset S \\ & \searrow \varphi^{-1} \circ F & \downarrow \varphi^{-1} \\ & & D \end{array}$$

Definição 21 Seja S uma superfície regular. Uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow S$ é **diferenciável em** $\vec{p}_0 \in \mathbb{R}^n$ se para qualquer parametrização regular local $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{p}_0 \in F^{-1}[\varphi^{-1}[D]]$, a função $\varphi^{-1} \circ F$ for diferenciável em $\vec{p}_0$.

Em particular, dada uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, uma curva em S é uma função diferenciável $\alpha : I \rightarrow S$, em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto.

Lema 22 Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva para a qual existe um sistema regular de coordenadas locais, $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha[I] \subset \varphi[D] \subset S$. Então existe um único par de funções diferenciáveis, $a_1, a_2 : I \rightarrow \varphi[D]$ tais que:

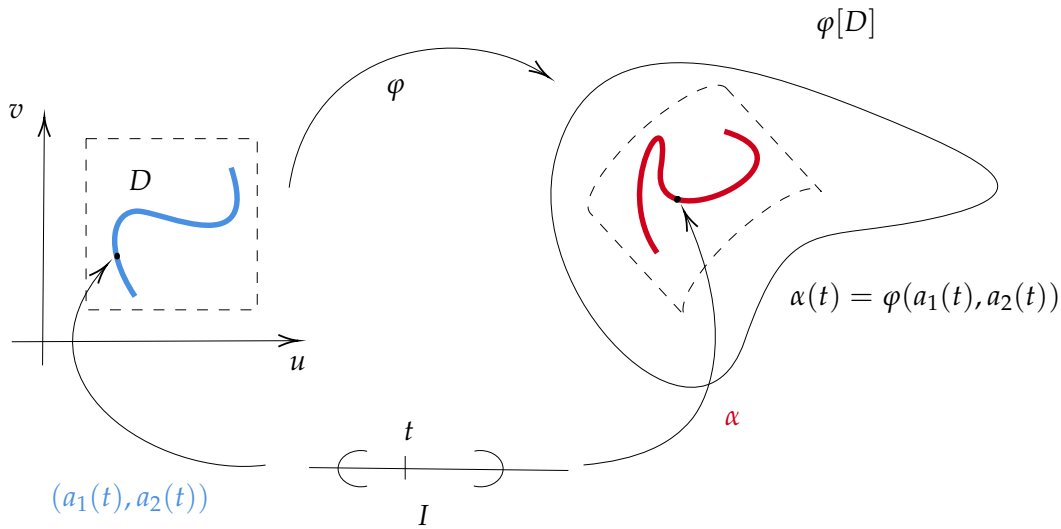
$$(\forall t \in I)(\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t)))$$

Por definição de diferenciabilidade de $\alpha : I \rightarrow S$, a função $\varphi^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow D$ é diferenciável (pois o é para *qualquer* sistema de coordenadas). Mas observe que:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \circ \alpha : I &\rightarrow D \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \varphi^{-1}(\alpha(t)) \end{aligned}$$

é uma curva regular em $\mathbb{R}^2$. Considerando as projeções:

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & \pi_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto u & (u, v) &\mapsto v \end{aligned} \quad \text{e}$$



obtemos as funções coordenadas de $\varphi^{-1} \circ \alpha$:

$$\begin{aligned} a_1 : I &\rightarrow \mathbb{R} & a_2 : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \pi_1 \circ (\varphi^{-1} \circ \alpha)(t) & t &\mapsto \pi_2 \circ (\varphi^{-1} \circ \alpha)(t) \end{aligned} \quad \text{e}$$

de tal forma que:

$$(\forall t \in I)((\varphi^{-1} \circ \alpha)(t) = (a_1(t), a_2(t))) \quad (3)$$

o que implica:

$$(\forall t \in I)((\varphi((\varphi^{-1} \circ \alpha)(t))) = \varphi(a_1(t), a_2(t)))$$

$$(\forall t \in I)(\alpha(t) = \text{id}_{\varphi[D]} \circ \alpha(t) = (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ \alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t)))$$

Tais funções são únicas, pois se:

$$\begin{aligned} b_1 : I &\rightarrow \mathbb{R} & b_2 : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto b_1(t) & t &\mapsto b_2(t) \end{aligned} \quad \text{e}$$

forem tais que:

$$(\forall t \in I)(\alpha(t) = \varphi(b_1(t), b_2(t)))$$

tem-se, pela invertibilidade de φ :

$$(\forall t \in I)((a_1(t), a_2(t))(\varphi^{-1} \circ \alpha)(t) = (b_1(t), b_2(t)))$$

e assim, $a_1 \equiv b_1$ e $a_2 \equiv b_2$.

O teorema a seguir articula o cálculo sobre S com o cálculo no $\mathbb{R}^3$:

Teorema 23 *Seja S uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$. Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável com $F[\mathbb{R}^2] \subseteq S$, então a correstricção de F a S , isto é:*

$$\begin{array}{ccc} F \upharpoonright^S : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & S \\ \vec{x} & \mapsto & F(\vec{x}) \end{array}$$

é diferenciável no sentido da Definição 21.

Como consequência do **Teorema 23**, podemos concluir, por exemplo, que toda curva parametrizada cuja imagem se encontre completamente contida em uma superfície regular é uma curva diferenciável sobre essa superfície regular.

Também, uma vez que uma parametrização é uma função diferenciável de um aberto de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, segue que toda parametrização é uma função diferenciável em S , no sentido da **Definição 20**. Desta forma, cada coordenada de uma parametrização é uma função diferenciável de um aberto de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

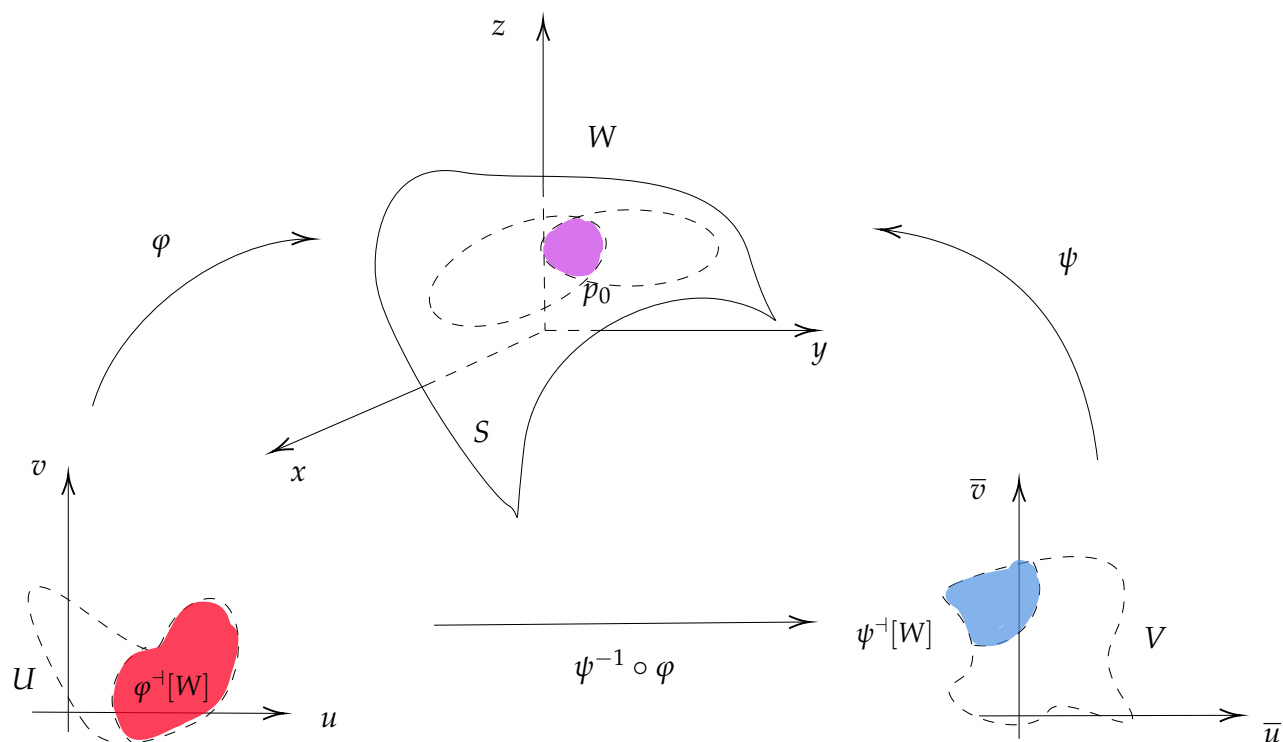
Corolário 24 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $\varphi : U \rightarrow \varphi[U] \subset S$ e $\psi : V \rightarrow \psi[V]$ duas parametrizações diferenciáveis (suaves) tais que $\varphi[U] \cap \psi[V] \neq \emptyset$, Então as funções:*

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1} \circ \psi := \varphi^{-1} \upharpoonright_{\varphi[U] \cap \psi[V]} \circ \psi \upharpoonright_{\psi^{-1}[\varphi[U] \cap \psi[V]]} : \varphi^{-1}[\varphi[U] \cap \psi[V]] & \rightarrow & \varphi^{-1}[\varphi[U] \cap \psi[V]] \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \varphi^{-1}(\psi(\vec{u}, \vec{v})) \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1} \circ \varphi := \psi^{-1} \upharpoonright_{\varphi[U] \cap \psi[V]} \circ \varphi \upharpoonright_{\varphi^{-1}[\varphi[U] \cap \psi[V]]} : \varphi^{-1}[\varphi[U] \cap \psi[V]] & \rightarrow & \psi^{-1}[\varphi[U] \cap \psi[V]] \\ (u, v) & \mapsto & \psi^{-1}(\varphi(u, v)) \end{array}$$

são funções diferenciáveis (de classe C^∞).



O corolário acima pode ser reescrito como segue:

Corolário 25 Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizações locais de S tais que $\varphi[U] \cap \psi[V] \neq \emptyset$. Então existem funções de classe C^∞ , $\bar{u}, \bar{v} : \varphi^{-1}[\varphi[U] \cap \psi[V]] \rightarrow \psi^{-1}[\varphi[U] \cap \psi[V]]$ tais que:

$$(\forall (u, v) \in \varphi^{-1}[\varphi[U] \cap \psi[V]]) (\varphi(u, v) = \psi(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)))$$

Certamente que, ainda com a notação do corolário acima, existem funções de classe C^∞ tais que:

$$(\forall (\bar{u}, \bar{v}) \in \psi^{-1}[\varphi[U] \cap \psi[V]]) (\psi(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})))$$

O **Corolário 25** facilita bastante a verificação de diferenciabilidade. Por exemplo, dada uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, em vez de verificarmos que para *todas* as parametrizações locais, $\varphi : D \rightarrow \varphi[D] \subset S$ temos $f \circ \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, basta fazermos a verificação para uma coleção de parametrizações locais que cubram S (em muitos casos, como no das superfícies regulares simples), uma única verificação é suficiente.

Exercício: Seja S uma superfície regular e $(\varphi_i : D_i \rightarrow S)_{i \in I}$ uma coleção de parametrizações regulares locais diferenciáveis de S tal que:

$$S = \bigcup_{i \in I} \varphi_i[D_i]$$

Mostre que $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ se, e somente se, para qualquer $i \in I$, $f \circ \varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ for de classe C^∞ .

Definição 26 (carta local (ou sistema local de coordenadas)) *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p_0 \in S$. Uma **carta local** (ou **sistema local de coordenadas**) para S em p_0 é um par ordenado $(\tilde{U}, \varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2)$ em que $\tilde{U} \subset S$ é um aberto que contém p_0 e:*

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (u(x, y, z), v(x, y, z)) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.

Definição 27 (coleção C^∞ –compatível de cartais locais) *Sejam S uma superfície regular e $\{\tilde{\varphi}_\alpha : \tilde{U}_\alpha \rightarrow \tilde{\varphi}_\alpha[\tilde{U}_\alpha] \subset \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in I\}$ uma coleção de cartas locais. Dizemos que a coleção é C^∞ –compatível se para quaisquer $\alpha, \beta \in I$ tais que $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta \neq \emptyset$, a função:*

$$\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} : \tilde{\varphi}_\alpha[\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta] \rightarrow \tilde{\varphi}_\beta[\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta]$$

for de classe C^∞ .

Definição 28 (atlas) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Um **atlas diferenciável de classe C^∞ para S** é uma coleção C^∞ -compatível de cartas locais cujos domínios recobrem S , ou seja, um conjunto de cartas locais:

$$\mathfrak{A} = \{(\tilde{U}_\alpha, \varphi_\alpha : \tilde{U}_\alpha \rightarrow U_\alpha \subset \mathbb{R}^2) \mid \alpha \in I\}$$

tal que:

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \tilde{U}_\alpha$$

e para quaisquer $\alpha, \beta \in I$ tais que $\varphi_\alpha[\tilde{U}_\alpha] \cap \varphi_\beta[\tilde{U}_\beta] \neq \emptyset$ a função:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta} &= \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta && \rightarrow \\ (u, v) &\mapsto \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(u, v)) \end{aligned}$$

é uma função de classe C^∞ .

4.1 Mudança de Parâmetros

Duas superfícies parametrizadas simples podem ter o mesmo traço. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & \psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u + v, u - v, 4uv) & (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto (\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}^2 - \bar{v}^2) \end{aligned} \quad \text{e}$$

têm o mesmo traço, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$, um **parabolóide hiperbólico**.

Dada uma superfície parametrizada regular simples, $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$, podemos obter várias outras parametrizações para S , como segue:

Proposição 29 Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples. Se

$$\begin{aligned} h : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) \end{aligned}$$

é uma função diferenciável tal que:

$$(\forall (\bar{u}, \bar{v}) \in \tilde{U}) \left(\det Jh(\bar{u}, \bar{v}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{u}, \bar{v}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) \end{bmatrix} \neq 0 \right)$$

e $h[\tilde{U}] = U$, então $(S, \psi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3)$, em que $\psi = \varphi \circ h : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, é uma superfície regular parametrizada com mesmo traço que S .

A função:

$$\begin{aligned} \psi : \quad \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\mapsto (x(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), y(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), z(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))) \end{aligned}$$

é diferenciável por ser a composição de duas funções diferenciáveis. Também:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}, \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right) \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{aligned}$$

de modo que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \times \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)}_{\det Jh(\bar{u}, \bar{v})}$$

Como $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq \vec{0}$ e como o determinante jacobiano de h nunca se anula, segue que $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \times \frac{\partial \psi}{\partial \bar{v}} \neq \vec{0}$.

Observe que uma mudança de parâmetros não precisa ser necessariamente injetiva. Uma aplicação pode ter determinante da matriz jacobiana não-nulo sem ser injetiva, como é o caso de $h(u, v) = (e^u \cdot \cos(v), e^u \cdot \sin(v))$.

4.2 O Plano Tangente

A diferencial de uma função é, como vimos, a melhor aproximação linear da função, a menos de uma translação, ou seja, naquele ponto. Uma realização geométrica de aproximação linear é o plano tangente. Para definirmos o plano tangente a uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em um ponto p_0 , restringimos nossa atenção a uma parametrização regular local de S que contenha p_0 , isto é:

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

tal que $p_0 \in \varphi[U]$, de modo que existe $(u_0, v_0) \in U$ tal que $\varphi(u_0, v_0) = p_0$. Como $U \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e (u_0, v_0) , existem $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$ tais que:

$$(u \in]u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon[) \Rightarrow (\varphi(u, v_0) \in \varphi[U])$$

$$(v \in]v_0 - \eta, v_0 + \eta[) \Rightarrow (\varphi(u_0, v) \in \varphi[U])$$

e $]u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon[\times]v_0 - \eta, v_0 + \eta[\subset U$. Obtemos, deste modo, duas curvas em S :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{v_0} :]u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon[& \rightarrow & \varphi[U] \\ u & \mapsto & \varphi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)) \end{array}$$

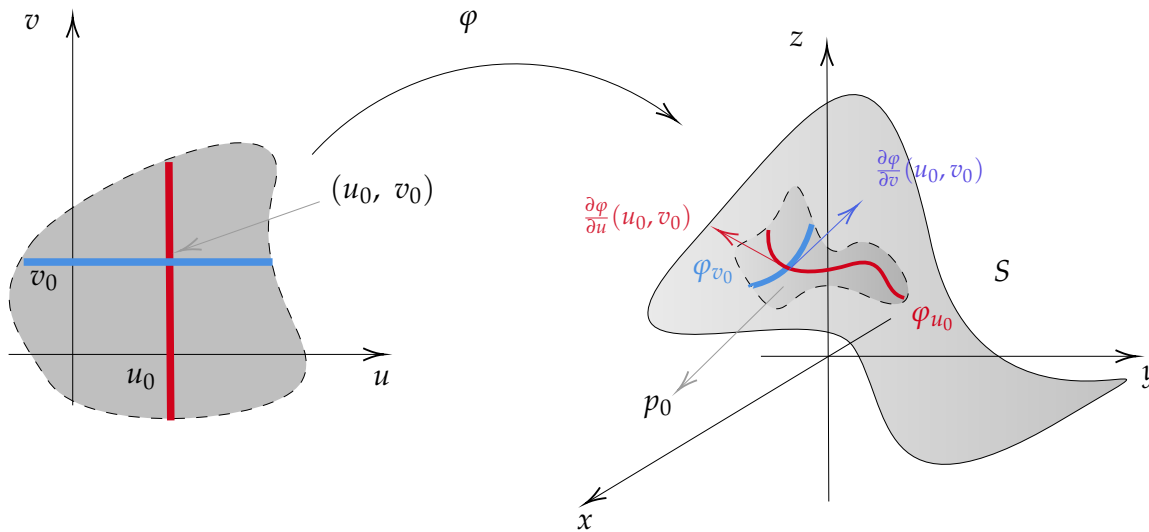
$$\begin{array}{ccc} \varphi_{u_0} :]v_0 - \eta, v_0 + \eta[& \rightarrow & \varphi[U] \\ v & \mapsto & \varphi(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)) \end{array}$$

denominadas as **curvas coordenadas sobre S por p_0** . A partir dessas curvas, podemos definir os vetores:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_0 + \varepsilon, v_0) - \varphi(u_0, v_0)}{\varepsilon} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\varphi(u_0, v_0 + \eta) - \varphi(u_0, v_0)}{\eta} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

que são vetores tangentes às curvas coordenadas φ_{v_0} e φ_{u_0} , respectivamente.

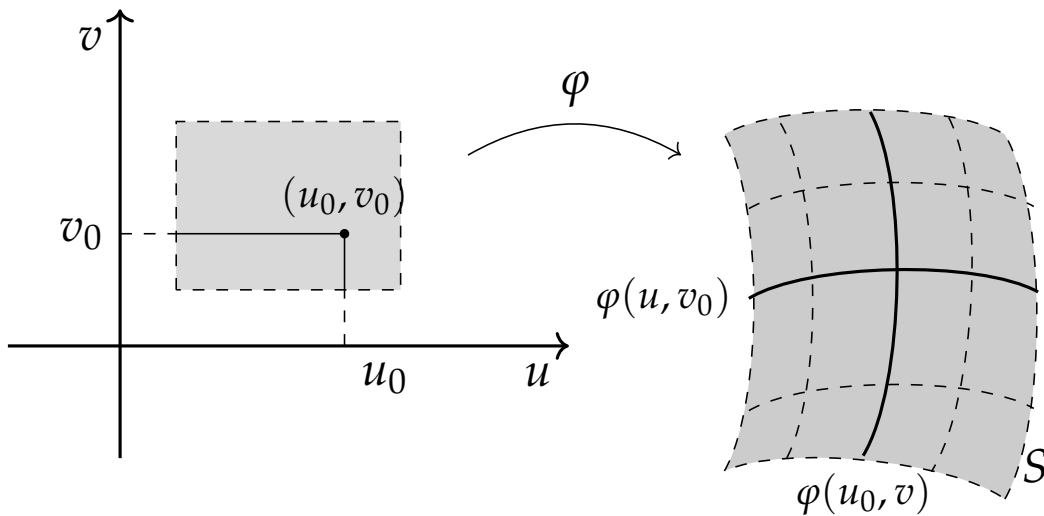


Definição 30 (curvas coordenadas) Seja $(S, \varphi : \tilde{U} \rightarrow S)$ uma curva regular parametrizada simples. Fixado $(u_0, v_0) \in \tilde{U}$, as curvas:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{v_0} : \{u \in \mathbb{R} \mid (u, v_0) \in U\} & \rightarrow & S \\ u & \mapsto & \varphi(u, v_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{u_0} : \{v \in \mathbb{R} \mid (u_0, v) \in U\} & \rightarrow & S \\ v & \mapsto & \varphi(u_0, v) \end{array}$$

são as **curvas coordenadas de φ em (u_0, v_0)** .



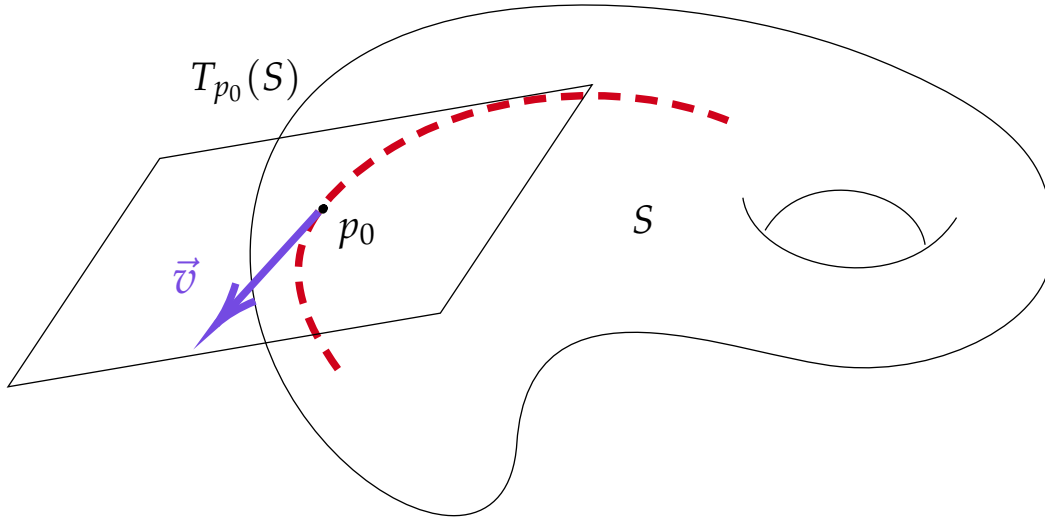
A discussão acima nos sugere uma definição natural para o que entendemos ser um vetor tangente a uma superfície regular (simples) em um ponto: ser o vetor tangente de alguma curva contida na superfície.

Definição 31 (vetor tangente) Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Um **vetor tangente a S em p_0** é um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que existe uma curva diferenciável de classe C^∞ em S :

$$\begin{array}{ccc} \alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[& \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \alpha(t) \end{array}$$

com $\text{tr}(\alpha) \subset S$, $\alpha(0) = (x_0, y_0, z_0) = p_0$ e $\alpha'(0) = \vec{v}$.

O conjunto de todos os vetores tangentes a S no ponto p_0 é denominado **plano tangente a S em p_0** , e será denotado por $T_{p_0}(S)$.



Lema 32 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $p_0 \in S$, $\varphi : U \rightarrow S$ uma parametrização regular local e $(u_0, v_0) \in U$ tais que $\varphi(u_0, v_0) = p_0$. Então $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a S em p_0 se, e somente se, puder ser escrito como combinação linear dos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$*

A condição de regularidade da parametrização local $\varphi : U \rightarrow S$ nos garante que os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ são linearmente independentes, de modo que constituem uma base para um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2, ou seja, um plano.

Seja $\vec{v} \in T_{p_0}(S)$. Então existem $\varepsilon > 0$ e $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \varphi[U] \subset S$ de classe C^∞ tais que $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha'(0) = \vec{v}$. Pelo **Lema 22**, α pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[&\rightarrow \varphi[U] \subset S \\ t &\mapsto \varphi(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

Pela **Regra da Cadeia**, para todo $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:

$$\alpha'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_1'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_2'(t) \quad (4)$$

Mas como $\alpha(0) = p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = \vec{v}$, segue que:

$$\vec{v} = \alpha'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(0), a_2(0)) \cdot a_1'(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(0), a_2(0)) \cdot a_2'(0) =$$

$$= \underbrace{a'_1(0)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \underbrace{a'_2(0)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

ou seja, $\vec{v}$ é uma combinação linear dos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Reciprocamente, considere:

$$\vec{v} = \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

para certos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Como U é aberto e $(u_0, v_0) \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[)((u_0 + t \cdot \alpha, v_0 + t \cdot \beta) \in U)$. Assim, é fácil ver, por (4), que $\vec{v}$ é o vetor velocidade da curva:

$$\begin{aligned} \tau :]-\varepsilon, \varepsilon[&\rightarrow \varphi[U] \\ t &\mapsto \varphi(u_0 + t \cdot \alpha, v_0 + t \cdot \beta) \end{aligned}$$

pois $\tau(0) = \varphi(u_0, v_0) = p_0$ e $\tau'(0) = \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \vec{v}$, logo $\vec{v} \in T_{p_0}(S)$.

Assim, com as notações do **Lema 32**, temos:

$$T_{p_0}(S) = \left[\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\} \right]$$

Proposição 33 *Sejam S uma superfície regular, $(U, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ e $(\tilde{U}, \tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3)$ parametrizações regulares e $h : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ uma função diferenciável cujo determinante jacobiano nunca se anula e tal que $h[\tilde{U}] = U$. Então se $\tilde{\varphi} = \varphi \circ h$, o plano tangente a $\tilde{\varphi}[\tilde{U}]$ em $\tilde{\varphi}(u_0, v_0)$ é igual ao plano tangente a $\varphi[U]$ em $\varphi(h(u_0, v_0))$.*

De fato, se $\tilde{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(h(\bar{u}, \bar{v}))$, denotando $h(\bar{u}, \bar{v})$ por (u, v) e $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{v})$. Temos:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(h(\bar{q})) \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(h(\bar{q})) \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q})$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(h(\bar{q})) \cdot \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(h(\bar{q})) \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q})$$

isto é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \end{bmatrix}}^{=Jh(\bar{q})} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(h(\bar{q})) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(h(\bar{q})) \end{bmatrix}$$

Como o determinante da matriz jacobiana de h não se anula, tem-se que $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u}(\bar{q}), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial v}(\bar{q})$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(h(\bar{q})), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(h(\bar{q}))$ são bases do mesmo plano de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 34 Sejam $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vetores linearmente independentes, e seja π o plano que contém o ponto p_0 e é gerado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Consideremos a função:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \pi \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (x_0 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1, y_0 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2, z_0 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3) \end{aligned}$$

que é uma parametrização regular de π . Afirmamos que $(\pi, \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi)$ é uma curva regular parametrizada.

Com efeito, $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi$ é contínua (por ser uma função afim em cada uma das suas coordenadas), e satisfaz:

$$\text{pt} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix} = \text{pt} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = 2$$

pois $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ é um conjunto linearmente independente.

As curvas coordenadas em $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ são:

$$\begin{aligned} \varphi_{v_0} : \mathbb{R} &\rightarrow \pi \\ u &\mapsto (x_0 + u \cdot a_1 + v_0 \cdot b_1, y_0 + u \cdot a_2 + v_0 \cdot b_2, z_0 + u \cdot a_3 + v_0 \cdot b_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{u_0} : \mathbb{R} &\rightarrow \pi \\ v &\mapsto (x_0 + u_0 \cdot a_1 + v \cdot b_1, y_0 + u_0 \cdot a_2 + v \cdot b_2, z_0 + u_0 \cdot a_3 + v \cdot b_3) \end{aligned}$$

que descrevem as retas no plano que contém p_0 e têm por vetores diretores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente.

Definição 35 Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Um **campo vetorial euclidiano sobre S** é uma função:

$$\begin{aligned} X : S &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ p &\mapsto X(p) \end{aligned}$$

Um campo vetorial euclidiano sobre S é um campo vetorial $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in S$ $X(p) \in T_p(S)$. Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é **normal** a S em $p \in S$ se for ortogonal a $T_p S$.

Como o plano tangente a uma superfície em um ponto tem dimensão dois (*i.e.*, $\dim_{\mathbb{R}} T_p S = 2$) e é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, existe uma única direção normal a S em cada ponto $p \in S$, de modo que todos os vetores normais à superfície S no ponto p serão colineares. Logo, se $\vec{w} \neq \vec{0}$ for um vetor normal a S em p , segue que:

$$T_p S = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{v}, \vec{w}_0 \rangle = 0\} = [\{\vec{w}_0\}]^\perp$$

Sempre que uma superfície é dada implicitamente (cf. **Teorema da Pré-Imagem**), é simples trabalhar com vetores tangentes e normais a ela.

Lema 36 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular definida por:*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = c \in \mathbb{R}\}$$

Então o campo gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla g : \quad S &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_0, y_0, z_0) &\mapsto \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) \end{aligned}$$

é um campo vetorial normal a S que nunca se anula.

Como estamos sob as hipóteses do **Teorema da Pré-Imagem**, o campo vetorial gradiente nunca se anula.

Vamos agora demonstrar que para qualquer $\vec{v} \in T_p S$, temos $\langle \nabla g(p), \vec{v} \rangle = 0$.

Primeiramente observe que se $\alpha : I \rightarrow S$ é uma curva de classe $\mathcal{C}^\infty$, então:

$$(\forall t \in I)(g(\alpha(t)) = g(x(t), y(t), z(t)) = c)$$

de modo que derivando ambos os membros da igualdade da sentença acima, obtemos:

$$(\forall t \in I) \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial g}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) = 0 \right)$$

ou seja:

$$(\forall t \in I) \left(\left\langle \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\alpha(t)), \frac{\partial g}{\partial y}(\alpha(t)), \frac{\partial g}{\partial z}(\alpha(t)) \right), \alpha'(t) \right\rangle = 0 \right)$$

Dado $\vec{v} \in T_p S$, existe uma curva $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \vec{v}$. Assim, em particular para $t = 0$ temos:

$$\left\langle \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\alpha(0)), \frac{\partial g}{\partial y}(\alpha(0)), \frac{\partial g}{\partial z}(\alpha(0)) \right), \alpha'(0) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial g}{\partial x}(p), \frac{\partial g}{\partial y}(p), \frac{\partial g}{\partial z}(p) \right), \vec{v} \right\rangle = 0$$

ou seja, para todo $\vec{v} \in T_p S$, tem-se $\langle \nabla g(p), \vec{v} \rangle = 0$. Desta forma, para todo p , $\nabla g(p)$ é um vetor não nulo normal a $p \in S$.

Exemplo 37 Consideremos:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Pelo **Lema 36**, o campo dado por:

$$\begin{aligned} X : S^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x, 2y, 2z) \end{aligned}$$

é um campo vetorial normal à esfera em cada um de seus pontos. O campo:

$$\begin{aligned} X : S^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (-y, x, 0) \end{aligned}$$

por sua vez, é um campo vetorial tangente à esfera, pois para qualquer $(x, y, z) \in S^2$, tem-se:

$$\langle (-y, x, 0), (2x, 2y, 2z) \rangle = -y \cdot 2x + x \cdot 2y + 0 \cdot 2z = 0$$

Observe que $X(0, 0, 1) = X(0, 0, -1) = (0, 0, 0)$.

Exemplo 38 Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular simples. Então:

$$\begin{aligned} \vec{N} : S &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ \varphi(u_0, v_0) &\mapsto \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|} \end{aligned}$$

é um campo vetorial unitário normal à superfície S .

Definição 39 Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples. A função:

$$\begin{aligned} \vec{N} : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \\ (u, v) &\mapsto \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|} \end{aligned}$$

é denominada a **aplicação normal de Gauss**.

Observação 40 Apenas os campos vetoriais tangentes a S pertencem ao Cálculo de S , uma vez que esses campos podem ser definidos, em última instância, exclusivamente em termos de curvas em S , ou seja, são campos “definíveis por habitantes daquela superfície, sem referência ao espaço ambiente, $\mathbb{R}^3$ ”.

Este não é o caso de campos vetoriais normais, por exemplo. No entanto, conforme veremos, vetores normais são muito úteis para um estudo de S feito a partir de $\mathbb{R}^3$.

Finalmente, adaptamos a noção de derivada direcional sobre uma superfície:

Lema 41 Seja $\vec{v}$ um vetor tangente à superfície regular S em um ponto p e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . Dadas quaisquer curvas $\alpha, \beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ tais que:

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= p = \beta(0) \\ \alpha'(0) &= \vec{v} = \beta'(0)\end{aligned}$$

tem-se:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0) = \frac{d}{dt}(f \circ \beta)(0)$$

De fato, por um lado tem-se:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0) = f'(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = f'(p) \cdot \vec{v} = f'(\beta(0)) \cdot \beta'(0) = \frac{d}{dt}(f \circ \beta)(0)$$

Definição 42 (derivada direcional) Sejam $p \in S$ um ponto da superfície S , $\vec{v}_p$ um vetor tangente à superfície regular S em p e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . A **derivada** $\vec{v}_p[f]$ de f com respeito a $\vec{v}_p$ é o valor:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0)$$

em que $\alpha : I \rightarrow S$ é qualquer curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \vec{v}_p$.

Exercício: Sejam $p \in S$ um ponto da superfície S , $\vec{v}_p, \vec{w}_p$ vetores tangentes à superfície regular S em p e $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^∞ . Mostre que a derivada introduzida na **Definição 42** satisfaz:

- (a) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall f : S \rightarrow \mathbb{R})(\alpha \cdot \vec{v}_p + \beta \cdot \vec{w}_p)[f] = \alpha \cdot \vec{v}_p[f] + \beta \cdot \vec{w}_p[f])$
- (b) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall f, g : S \rightarrow \mathbb{R})(\vec{v}_p[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \alpha \cdot \vec{v}_p[f] + \beta \cdot \vec{v}_p[g])$
- (c) $(\forall f, g : S \rightarrow \mathbb{R})(\vec{v}_p[f \cdot g] = \vec{v}_p[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot \vec{v}_p[g])$

4.3 Funções Diferenciáveis entre Superfícies Regulares

Para definir a diferenciabilidade de uma função entre duas superfícies regulares novamente recorreremos às parametrizações regulares, e exigimos que todas as suas expressões coordenadas sejam diferenciáveis.

Definição 43 Uma função $f : M \rightarrow N$ de uma superfície para outra é **diferenciável em** $p \in M$, se para toda parametrização regular local $(U, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ de M com $(u_0, v_0) \in U$ tal que $\varphi(u_0, v_0) = p$ e toda parametrização regular local $(V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3)$ de N com $(w_0, z_0) \in V$ tal que $\psi(w_0, z_0) = f(p)$, a função composta $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}[f^{-1}[\psi[V]]] \rightarrow V$:

$$\begin{array}{ccc} \varphi[U] \subset M & \xrightarrow{f} & \psi[V] \subset N \\ \uparrow \varphi & & \downarrow \psi^{-1} \\ \varphi^{-1}[f^{-1}[\psi[V]]] & \xrightarrow{\psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & V \end{array}$$

for diferenciável em (u_0, v_0) .

Evidentemente, a função $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ está definida em todos os pontos (u, v) de U tal que $f(\varphi(u, v))$ está na imagem de ψ . É possível concluir deduzimos do **exercício** que, ao aplicar esta definição, é suficiente verificar parametrizações suficientes para cobrir tanto M quanto N .

5 Primeira Forma Fundamental

A primeira forma fundamental é uma estrutura geométrica (uma forma quadrática) que podemos definir em cada superfície diferenciável, e que nos permite calcular comprimentos de curvas, ângulos entre curvas e distâncias entre pontos (ou seja, “fazer geometria sobre uma

superfície diferenciável”).

Definição 44 (primeira forma fundamental) *Sejam $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples e $(u_0, v_0) \in U$. A **primeira forma fundamental de S em $q = \varphi(u_0, v_0) \in S$** é:*

$$I_q : \begin{array}{ccc} T_q S & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{w} & \mapsto & \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \end{array}$$

No contexto da definição acima, um vetor $\vec{w}_q \in T_q S$ é da forma:

$$\vec{w}_q = \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} I_q(\vec{w}) &= \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \left\langle \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \alpha \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle = \\ &= \alpha^2 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \right\rangle + 2\alpha\beta \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle + \beta^2 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle \end{aligned}$$

Usando as notações:

$$\begin{cases} E(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \right\rangle \\ F(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle \\ G(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle \end{cases}$$

obtemos:

$$I_q(\vec{w}) = \alpha^2 \cdot E(u_0, v_0) + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot F(u_0, v_0) + \beta^2 \cdot G(u_0, v_0)$$

ou, matricialmente:

$$I_q(\vec{w}_q) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E(u_0, v_0) & F(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) & G(u_0, v_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Definimos, assim, as funções:

$$\begin{aligned}
E : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\mapsto \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle \\
F : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\mapsto \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle \\
G : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\mapsto \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle
\end{aligned}$$

que são denominadas **coeficientes da primeira forma fundamental**. As funções $E, F, G : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem às seguintes propriedades:

(a) $(\forall (u, v) \in U)((E(u, v) > 0) \& (G(u, v) > 0))$, dado que os vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ são ambos não-nulos;

(b)

$$(\forall (u, v) \in U)(E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2 > 0) \quad (5)$$

De fato, como:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|^2 + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|^2$$

segue que:

$$E \cdot F - G^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle^2 = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|^2 > 0$$

Exemplo 45 (plano por p_0 com vetores diretores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$) $\varphi(u, v) = p_0 + u \cdot \vec{w}_1 + v \cdot \vec{w}_2$.

Exemplo 46 (cilindro circular) $\varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$.

Exemplo 47 (esfera centrada na origem de raio a) $\varphi(u, v) = (a \cdot \sin(v) \cdot \cos(u), a \cdot \sin(v) \cdot \sin(u), a \cdot \cos(v))$.

Exemplo 48 (superfície de revolução) $\varphi(u, v) = (f(u) \cdot \cos(v), f(u) \cdot \sin(v), g(u)), f(u) > 0$.

Observamos que uma mudança de parâmetros, embora modifique os coeficientes da primeira forma fundamental, mantém a *forma em si* invariante. De fato, se $\tilde{\varphi}(u, v) = \varphi(h(u, v))$ para algum $h : \tilde{U} \rightarrow U$, então $T_{\tilde{\varphi}(u, v)}S = T_{\tilde{\varphi}(u, v)}\tilde{\varphi}[\tilde{U}] = T_{h(u, v)}\varphi[U] = T_{h(u, v)}S$. Assim, se $\vec{w}$ pertence a qualquer um desses planos, então:

$$\tilde{I}_{\tilde{\varphi}(u, v)}(\vec{w}) = I_{h(u, v)}(\vec{w}) = \|\vec{w}\|^2$$

A seguir, veremos que os conceitos de comprimento de uma curva da superfície, ângulo entre vetores tangentes e área de uma região da superfície estão relacionados com a primeira forma fundamental.

Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples. Se:

$$\begin{array}{ccc} \alpha : & I \subset \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto \varphi(u(t), v(t)) \end{array}$$

é uma curva parametrizada diferenciável da superfície, então para $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento de t_0 a t_1 é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{q(t)}(\alpha'(t))} dt,$$

onde usamos o fato de que $\alpha'(t)$ é um vetor tangente à superfície em $q(t) = (u(t), v(t))$.

Se $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ são vetores não-nulos tangentes a S em $q = (u, v)$, então o ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$, formado por $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_1\| \cdot \|\vec{w}_2\|}$$

Para expressar $\cos \theta$ em termos da primeira forma fundamental, observamos que $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$ é um vetor tangente a S em q e:

$$\langle \vec{w}_1 + \vec{w}_2, \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rangle = \|\vec{w}_1\|^2 + 2 \cdot \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle + \|\vec{w}_2\|^2$$

e portanto:

$$\cos(\theta) = \frac{I_q(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) - I_q(\vec{w}_1) - I_q(\vec{w}_2)}{2 \cdot \sqrt{I_q(\vec{w}_1) \cdot I_q(\vec{w}_2)}}$$

Se duas curvas da superfície, $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ e $\beta(r) = \psi(u(r), v(r))$ são tais que $(u(t_0), v(t_0)) = (u(r_0), v(r_0))$, então o ângulo θ com que as curvas se intersectam é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(r_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \cdot \|\beta'(r_0)\|}$$

Em particular, o ângulo formado pelas curvas coordenadas de $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ em $(u_0, v_0) \in U$ é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|} = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0) \cdot G(u_0, v_0)}}$$

Portanto, concluímos que as curvas coordenadas de uma superfície regular parametrizada simples $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ se intersectam ortogonalmente se, e somente se, $F(u, v) = 0$ para todo $(u, v) \in U$.

A seguir, vamos definir a noção de área de regiões de uma superfície usando a primeira forma quadrática.

Definição 49 (região) Uma região é um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ fechado e limitado cujo interior é homeomorfo a uma bola aberta de $\mathbb{R}^2$ e cujo bordo, homeomorfo a uma circunferência, é formado por um número finito de traços de curvas regulares. Se $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ é uma superfície regular e $D \subset U$ é uma **região** de $\mathbb{R}^2$, então dizemos que $\varphi[D] \subset S$ é uma **região da superfície** S .

Definição 50 Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples e $D \subset U$ uma região de $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi|_{\text{int.}(D)}$ é injetora. A **área da região** $\varphi[D]$ é dada por:

$$A(\varphi[D]) = \iint_D \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv$$

em que E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental de $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$.

Uma justificativa geométrica para essa definição está baseada no seguinte fato. Fixemos um ponto $(u_0, v_0) \in D$. A área do paralelogramo formado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ é dada por $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|$. Este valor é aproximadamente igual à área de uma região em $\varphi[\tilde{D}]$, em que $\tilde{D} \subset D$ é um retângulo com vértice em (u_0, v_0) e cujos lados são paralelos aos eixos coordenados u e v (cf. **seção 1.1** da <https://www.ime.usp.br/~jeancb/S02MAT2455.pdf> AGENDA 02 de Cálculo III). Além disso, lembramos que $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| = \sqrt{E \cdot G - F^2}$.

Verifiquemos agora que a área de uma região da superfície é invariante por mudança de coordenadas. Seja $\varphi(u, v) = \varphi \circ h(\tilde{u}, \tilde{v})$ uma reparametrização de φ por h , em que $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $h : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ é uma mudança de coordenadas. Sejam $\tilde{D} \subset \tilde{U}$ e $D \subset U$ regiões do plano tais que $D = h[\tilde{D}]$. Então $A(\varphi[D]) = A(\varphi[\tilde{D}])$. De fato, se $h(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u, v)$, então:

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right\| d\tilde{u} d\tilde{v} = \iint_{\tilde{D}} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\tilde{u}, \tilde{v}) \right\| \cdot |\det Jh(\tilde{u}, \tilde{v})| d\tilde{u} d\tilde{v} =$$

$$= \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv$$

em que a última igualdade decorre do **Teorema da Mudança de Variável para Integrais Duplas**:

Teorema 51 (Mudança de Variáveis) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $\bar{u}, \bar{v} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $C^1(\tilde{U}, \mathbb{R})$ e $\tilde{D} \subset \tilde{U}$ um compacto (conjunto fechado e limitado) tais que:*

$$\begin{aligned} h : \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)) \end{aligned}$$

- é injetora em $\tilde{D}$;
- o determinante Jacobiano da aplicação h , $\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}$ nunca se anula em D .

Se f é Riemann-integrável em $h[\tilde{D}]$, então:

$$\iint_{h[\tilde{D}]} f(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u}d\bar{v} = \iint_D f(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)) \left| \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right| dudv \quad (6)$$

Se $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ é uma superfície regular simples e $Q \subset S$ é uma região que pode ser decomposta em um número finito de regiões, então definimos a área de Q como sendo a soma das áreas das regiões da decomposição. Pode-se demonstrar que esta soma não depende da maneira como Q é decomposta.

Exemplo 52 *Consideremos a superfície de revolução:*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto ((a + r \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), (a + r \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), r \cdot \sin(u)) \end{aligned}$$

em que $0 < r < a$, que descreve um toro. A função acima é periódica em u e v , pois $\varphi(u + 2\pi, v + 2\pi) = \varphi(u, v)$. Portanto, se considerarmos a região $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \leq u \leq 2\pi) \& (0 \leq v \leq 2\pi)\}$, temos que $\varphi[D]$ é o toro, e $\varphi|_{\text{int.}(D)}$ é injetora. Daí concluímos que a área do toro é igual a:

$$A(\varphi[D]) = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r \cdot (r \cdot \cos(u) + a) dudv = 4\pi^2 \cdot a \cdot r$$

Definição 53 Sejam $(S_1, \varphi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ e $(S_2, \varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ superfícies simples. Diremos que $(S_1, \varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3)$ e $(S_2, \varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3)$ são **isométricas** se para qualquer $(u, v) \in U$, os coeficientes da primeira forma fundamental de φ_1 e de φ_2 coincidirem, isto é:

$$\begin{cases} D_1(u, v) = E_2(u, v) \\ F_1(u, v) = F_2(u, v) \\ G_1(u, v) = G_2(u, v) \end{cases}$$

Se duas superfícies regulares simples $(S_1, \varphi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ e $(S_2, \varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ têm o mesmo domínio U , então podemos definir uma bijeção entre seus traços. De fato, se $\varphi_1[U] = S_1$ e $\varphi_2[U] = S_2$, como $\varphi_1, \varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ são injetoras, elas admitem funções inversas, $\varphi_1^{-1} : S_1 \rightarrow U$ e $\varphi_2^{-1} : S_2 \rightarrow U$. Assim, a função definida por $\phi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : S_1 \rightarrow S_2$:

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{\phi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}} & S_2 \\ & \swarrow \varphi_1 \quad \searrow \varphi_2 & \\ & U & \end{array}$$

é bijetora, e sua inversa é $\phi^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$.

Se $(S_1, \varphi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ e $(S_2, \varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ são superfícies simples isométricas, então a função $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ é denominada uma **isometria**. Esta definição é justificada pela seguinte propriedade: se duas superfícies simples são isométricas, então a função $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ preserva “distâncias” entre pontos correspondentes nos traços das superfícies.

Exemplo 54 Sejam S a região plana parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, 0) \end{aligned}$$

e $\tilde{S}$ o cilindro circular menos um meridiano, parametrizado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos(u), \sin(u), v) \end{aligned}$$

Afirmamos que (S, φ) e $(\tilde{S}, \tilde{\varphi})$ são superfícies simples isométricas.

De fato,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (1, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 0)$$

de modo que dado qualquer $(u_0, v_0) \in]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$, temos:

$$E(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \right\rangle = \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 1$$

$$F(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = 0$$

$$G(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle = \langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = 1$$

e:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u}(u, v) = (-\sin(u), \cos(u), 0)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial v}(u, v) = (0, 0, 1)$$

e portanto:

$$\tilde{E}(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u}(u_0, v_0) \right\rangle = \langle (-\sin(u_0), \cos(u_0), 0), (-\sin(u_0), \cos(u_0), 0) \rangle = 1$$

$$\tilde{F}(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle = \langle (-\sin(u_0), \cos(u_0), 0), (0, 0, 1) \rangle = 0$$

$$\tilde{G}(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = 1$$

A isometria, $\phi : S \rightarrow \tilde{S}$ consiste em enrolar a região do plano em torno do cilindro de tal forma que os segmentos horizontais de S sejam mapeados sobre os paralelos do cilindro menos um ponto, e as retas verticais do plano nos meridianos.

Observe que se duas superfícies são isométricas, então por definição, as propriedades geométricas da superfície que dependem apenas da primeira forma fundamental são preservadas pela isometria. Por exemplo, se $\alpha : I \rightarrow S$ é uma curva na superfície S e se $\phi : S \rightarrow \tilde{S}$ é uma isometria, então o comprimento de α é igual ao comprimento de $\phi \circ \alpha : I \rightarrow \tilde{S}$. A seguir, veremos que esta propriedade caracteriza as superfícies isométricas (o que dá mais sentido à definição, intuitivamente).

Proposição 55 *Sejam $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ e $(\tilde{S}, \tilde{\varphi} : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ superfícies simples. Então S e $\tilde{S}$ são isométricas se, e somente se a aplicação:*

$$\begin{aligned} \phi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \quad S &\rightarrow \tilde{S} \\ (u, v) &\mapsto \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}(u, v) \end{aligned}$$

preserva comprimento de curvas, isto é, para toda curva $\alpha : I \rightarrow S$, o comprimento de α é igual ao comprimento de $\phi \circ \alpha$.

Seja:

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow S \\ t &\mapsto \varphi(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

uma curva regular em S e $\phi \circ \alpha : I \rightarrow \tilde{S}$ a imagem da curva α pela isometria ϕ . Como, por definição $\phi = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$, temos, para todo $t \in I$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t) &= (\phi \circ \alpha)(t) = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ \alpha)(t) = \tilde{\varphi} \circ (\varphi^{-1} \circ (\varphi(a_1(t), a_2(t)))) = \\ &= \tilde{\varphi} \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi)(a_1(t), a_2(t)) = \tilde{\varphi}(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_1'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_2'(t) \\ \tilde{\alpha}'(t) &= \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_1'(t) + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_2'(t) \end{aligned}$$

e os comprimentos das curvas α e $\tilde{\alpha}$ de t_0 a t_1 são dados por:

$$\ell(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[a_1'(t)]^2 \cdot E(a_1(t), a_2(t)) + 2 \cdot a_1'(t) \cdot a_2'(t) \cdot F(a_1(t), a_2(t)) + [a_2'(t)]^2 \cdot G(a_1(t), a_2(t))} dt$$

$$\ell(\tilde{\alpha}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[a_1'(t)]^2 \cdot \tilde{E}(a_1(t), a_2(t)) + 2 \cdot a_1'(t) \cdot a_2'(t) \cdot \tilde{F}(a_1(t), a_2(t)) + [a_2'(t)]^2 \cdot \tilde{G}(a_1(t), a_2(t))} dt$$

Uma vez que S e $\tilde{S}$ são isométricas, temos, pela **Definição 56**, para todo $t \in I$:

$$\begin{cases} \tilde{E}(a_1(t), a_2(t)) = E(a_1(t), a_2(t)) \\ \tilde{F}(a_1(t), a_2(t)) = F(a_1(t), a_2(t)) \\ \tilde{G}(a_1(t), a_2(t)) = G(a_1(t), a_2(t)) \end{cases}$$

de modo que:

$$\ell(\alpha) = \ell(\tilde{\alpha})$$

Reciprocamente, suponhamos que para toda curva $\alpha : I \rightarrow S$, os comprimentos de α e de $\tilde{\alpha} = \phi \circ \alpha$ coincidam. Mostraremos que $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ e $(\tilde{S}, \tilde{\varphi} : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ são isométricas. Seja $q = (u_0, v_0) \in U$ qualquer. Considere a curva:

$$\begin{aligned} \alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[&\rightarrow S \\ t &\mapsto \varphi(u_0 + t \cdot a, v_0 + t \cdot b) \end{aligned}$$

em que a e b são quaisquer constantes que não se anulam simultaneamente e $\varepsilon > 0$ é tal que $(\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[)((u_0 + t \cdot a, v_0 + t \cdot b) \in U)$. Sejam, ainda, s e $\tilde{s}$ funções comprimento de arco de α e $\tilde{\alpha}$ entre t_0 e t , respectivamente, ou seja:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

$$\tilde{s}(t) = \int_{t_0}^t \|\tilde{\alpha}'(t)\| dt$$

Dado que, por hipótese, $\ell(\alpha) = \ell(\tilde{\alpha})$, tem-se para todo $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:

$$s(t) = \tilde{s}(t),$$

derivando os dois membros da igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 \cdot E(a_1(t), a_2(t)) + 2 \cdot a \cdot b \cdot F(a_1(t), a_2(t)) + b^2 \cdot G(a_1(t), a_2(t))} &= \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = s'(t) = \\ = \tilde{s}'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\tilde{\alpha}'(t)\| dt = \sqrt{a^2 \cdot \tilde{E}(a_1(t), a_2(t)) + 2 \cdot a \cdot b \cdot \tilde{F}(a_1(t), a_2(t)) + b^2 \cdot \tilde{G}(a_1(t), a_2(t))} \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 \cdot E(a_1(t), a_2(t)) + 2 \cdot a \cdot b \cdot F(a_1(t), a_2(t)) + b^2 \cdot G(a_1(t), a_2(t))} &= \\ = \sqrt{a^2 \cdot \tilde{E}(a_1(t), a_2(t)) + 2 \cdot a \cdot b \cdot \tilde{F}(a_1(t), a_2(t)) + b^2 \cdot \tilde{G}(a_1(t), a_2(t))} \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} a^2 \cdot E(a_1(t), a_2(t)) + 2 \cdot a \cdot b \cdot F(a_1(t), a_2(t)) + b^2 \cdot G(a_1(t), a_2(t)) &= \\ = a^2 \cdot \tilde{E}(a_1(t), a_2(t)) + 2 \cdot a \cdot b \cdot \tilde{F}(a_1(t), a_2(t)) + b^2 \cdot \tilde{G}(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

ou seja, para todo $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$:

$$a^2 \cdot (E(a_1(t), a_2(t)) - \tilde{E}(a_1(t), a_2(t))) + 2 \cdot a \cdot b \cdot (F(a_1(t), a_2(t)) - \tilde{F}(a_1(t), a_2(t))) + b^2 \cdot (G(a_1(t), a_2(t)) - \tilde{G}(a_1(t), a_2(t))) = 0$$

Em particular, para $t = 0$ temos:

$$a^2 \cdot (E(q) - \tilde{E}(q)) + 2 \cdot a \cdot b \cdot (F(q) - \tilde{F}(q)) + b^2 \cdot (G(q) - \tilde{G}(q)) = 0$$

que vale para quaisquer constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Portanto, fazendo $a = 1$ e $b = 0$, concluimos que $E(q) = \tilde{E}(q)$, e fazendo $a = 0$ e $b = 1$, obtemos $G(q) = \tilde{G}(q)$. Concluimos assim que:

$$2 \cdot a \cdot b \cdot (F(q) - \tilde{F}(q)) = 0$$

de modo que fazendo $a = 1 = b$, obtemos $F(q) = \tilde{F}(q)$. Assim, pela **Definição 56**, como q é um ponto qualquer de U , tem-se S e $\tilde{S}$ isométricas.

6 Segunda Forma Fundamental: Curvatura Normal

O estudo das propriedades geométricas locais de uma superfície regular depende de duas formas quadráticas, uma das quais sendo a **primeira forma fundamental**. A segunda será estudada nesta seção.

Definição 56 (segunda forma fundamental) *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples. Fixado $q = (u_0, v_0) \in U$, a segunda forma quadrática de (S, φ) em q é a função:*

$$II_q : T_q S \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{w}_q \mapsto \langle \alpha''(0), \vec{N}(u_0, v_0) \rangle$$

em que $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S$ é tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = \vec{w}_q$ e $\vec{N}(u_0, v_0)$ é o vetor normal a S em q .

Vamos ver agora que $II_q(\vec{w}_q)$ não depende da curva α escolhida. De fato, como $\vec{w}_q \in T_q S$, tem-se:

$$\vec{w}_q = a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

para certos $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos uma curva:

$$\begin{array}{ccc} \alpha :] - \varepsilon, \varepsilon[& \rightarrow & S \\ t & \mapsto & \varphi(a_1(t), a_2(t)) \end{array}$$

tal que $(a_1(0), a_2(0)) = (u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = \vec{w}_q$ e $(a'_1(0), a'_2(0)) = (a, b)$. Como:

$$\alpha'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_1(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_2(t)$$

e aplicando a **Regra da Cadeia** e a **Regra do Produto**, obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha''(t) = & a''_1(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) + [a'_1(t)]^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(a_1(t), a_2(t)) + 2 \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(a_1(t), a_2(t)) + \\ & + [a'_2(t)]^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(a_1(t), a_2(t)) + a''_2(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

de modo que fazendo $t = 0$:

$$\alpha''(0) = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u_0, v_0) + 2ab \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u_0, v_0) + b^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u_0, v_0)$$

Assim,

$$\begin{aligned} II_q(\vec{w}_q) &= \langle \alpha''(0), \vec{N}(u_0, v_0) \rangle = \\ &= \left\langle a^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u_0, v_0) + 2ab \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u_0, v_0) + b^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u_0, v_0), \vec{N}(u_0, v_0) \right\rangle = \\ &= a^2 \cdot \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u_0, v_0), \vec{N}(u_0, v_0) \right\rangle + 2 \cdot a \cdot b \cdot \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u_0, v_0), \vec{N}(u_0, v_0) \right\rangle + b^2 \cdot \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u_0, v_0), \vec{N}(u_0, v_0) \right\rangle \end{aligned}$$

e esta última expressão não depende de α .

Introduzindo a notação:

$$\begin{cases} e(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u_0, v_0), \vec{N}(u_0, v_0) \right\rangle \\ f(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u_0, v_0), \vec{N}(u_0, v_0) \right\rangle \\ g(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u_0, v_0), \vec{N}(u_0, v_0) \right\rangle \end{cases}$$

temos que:

$$II_q(\vec{w}_q) = a^2 \cdot e(u_0, v_0) + 2ab \cdot f(u_0, v_0) + b^2 \cdot g(u_0, v_0)$$

ou, matricialmente:

$$II_q(\vec{w}_q) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e(u_0, v_0) & f(u_0, v_0) \\ f(u_0, v_0) & g(u_0, v_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

As funções diferenciáveis: $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ são denominadas os **coeficientes da segunda forma fundamental** da superfície regular parametrizada simples (S, φ) .

Definição 57 (curvatura normal) *Sejam $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples e $q = (u_0, v_0) \in U$. A **função curvatura normal** em q é a função:*

$$\begin{aligned} \kappa_n : T_q S \setminus \{(0, 0, 0)\} &\mapsto \mathbb{R} \\ \vec{w}_q &\mapsto \frac{II_q(\vec{w}_q)}{I_q(\vec{w}_q)} \end{aligned}$$

Observação 58 *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular simples e $q = \varphi(u_0, v_0)$. Se $\vec{w} \in T_q S \setminus \{\vec{0}\}$, então:*

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\kappa_n(\lambda \cdot \vec{w}) = \kappa_n(\vec{w}))$$

De fato, seja:

$$\vec{w} = a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

com $(a, b) \neq (0, 0)$. Sejam, ainda, e_0, f_0 e g_0 os coeficientes de sua segunda forma fundamental. Temos:

$$\begin{aligned} \kappa_n(\lambda \cdot \vec{w}) &= \frac{II_q(\lambda \cdot \vec{w})}{I_q(\vec{w})} = \frac{\begin{bmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_0 & f_0 \\ f_0 & g_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \end{bmatrix}}{\lambda^2 \cdot \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} = \\ &= \frac{\lambda^2 \cdot a^2 \cdot e_0 + 2 \cdot \lambda^2 \cdot a \cdot b \cdot f_0 + \lambda^2 \cdot b^2 \cdot g_0}{\lambda^2 \cdot \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} = \\ &= \frac{a^2 \cdot e_0 + 2 \cdot a \cdot b \cdot f_0 + b^2 \cdot g_0}{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} = \frac{II_q(\vec{w})}{I_q(\vec{w})} = \kappa_n(\vec{w}) \end{aligned}$$

Como consequência, pode-se falar na curvatura normal em q segundo toda uma direção tangente à superfície

Antes de dar alguns exemplos, vejamos a interpretação geométrica da curvatura normal e da segunda forma fundamental. Sejam $\vec{w} \in T_q S$ unitário e:

$$\begin{aligned}\alpha : I &\mapsto S \\ s &\mapsto \varphi(a_1(s), a_2(s))\end{aligned}$$

uma curva regular parametrizada por comprimento de arco sobre a superfície S que passa pelo ponto $q = \alpha(s_0) = \varphi(a_1(s_0), a_2(s_0)) \in S$ tal que $\alpha'(s_0) = \vec{w}$. Se a curvatura de α em s_0 é não nula, ou seja, se $\kappa_\alpha(s_0) \neq 0$, então:

$$\begin{aligned}\kappa_n(\vec{w}) = II_q(\vec{w}) &= \langle \alpha''(s_0), \vec{N}(\varphi(a_1(s_0), a_2(s_0))) \rangle = \\ &= \kappa_\alpha(s_0) \cdot \langle \vec{N}_\alpha(s_0), \vec{N}(\varphi(a_1(s_0), a_2(s_0))) \rangle = \kappa_\alpha(s_0) \cdot \cos(\theta)\end{aligned}\quad (7)$$

em que $\vec{N}_\alpha(s_0)$ é o vetor normal à curva α em s_0 e $\theta = \angle(\vec{N}_\alpha(s_0), \vec{N}(\varphi(a_1(s_0), a_2(s_0))))$.

Como $II_q(\vec{w})$ e $\kappa_n(\vec{w})$ não dependem da curva α escolhida, podemos aplicar a relação (7) a uma curva mais conveniente, que chamaremos de **seção normal da superfície determinada por $\vec{w}$** , obtida da interseção do traço de φ para (u, v) suficientemente próximo de (u_0, v_0) com o plano que passa por $\varphi(u_0, v_0)$ e é ortogonal ao vetor $\vec{w} \times \vec{N}(u_0, v_0)$.

Nestas condições, a seção normal é o traço da curva regular plana definida por $\alpha(s) = \varphi(a_1(s), a_2(s))$, parametrizada por comprimento de arco, tal que $(a_1(s_0), a_2(s_0)) = (u_0, v_0)$ e $\beta'(s_0) = \vec{w}$. Se $\kappa_\alpha(s_0) = 0$, então $\kappa_n(\vec{w}) = II_q(\vec{w}) = 0$. Se $\kappa_\alpha(s_0) > 0$, então o vetor normal $\vec{N}_\alpha(s_0) = \pm \vec{N}(\varphi(u_0, v_0))$ e, portanto, segue-se de (7) que:

$$\kappa_n(\vec{w}) = II_q(\vec{w}) = \pm \kappa_\alpha(s_0)$$

Portanto, concluímos que, se $\vec{w}$ é um vetor unitário tangente à superfície em q , então $|\kappa_n(\vec{w})|$ é igual à curvatura da seção normal em q determinada por $\vec{w}$.

Observamos que, se $\vec{w}$ é um vetor não-nulo de $T_q S$, então $II_q(\vec{w}) = \|\vec{w}\|^2 \kappa_n(\vec{w})$, isto é, $|II_q(\vec{w})|$ é igual à curvatura da seção normal a S em q , determinada por $\vec{w}$, multiplicada por $\|\vec{w}\|^2$.

Segue-se que se $\tilde{\varphi} = \varphi \circ h$ para alguma reparametrização $h : \tilde{U} \rightarrow U$, então a segunda forma quadrática e a curvatura normal de $(S, \tilde{\varphi})$ em $\tilde{q} = \tilde{\varphi}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$, e a de (S, φ) em $h(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) = (u_0, v_0)$ permanecem inalteradas ou mudam de sinal, a depender da orientação do vetor normal à superfície naquele ponto.

Exemplo 59 Considere a superfície parametrizada por:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \times]0, \pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (a \cdot \sin(v) \cdot \cos(u), a \cdot \sin(v) \cdot \sin(u), a \cdot \cos(v))\end{aligned}$$

que descreve uma esfera centrada na origem e de raio a , e o vetor normal:

$$\vec{N}(u, v) = (-\sin(v) \cdot \cos(u), -\sin(v) \cdot \sin(u), -\cos(v))$$

aponta para dentro da esfera, concluímos que a curvatura normal é constante e igual a $\frac{1}{a}$ e a segunda forma quadrática é igual a $\frac{\|\vec{w}\|^2}{a}$, para todo $q = \varphi(u, v)$ e $\vec{w} \in T_q S$

Exemplo 60 Seja:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (r \cdot \cos(u), r \cdot \sin(u), v) \end{aligned}$$

com $r > 0$, a superfície do cilindro circular. Vamos calcular os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de S e verificar que existem direções tangentes em que a função admite um máximo e um mínimo. Como:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) &= (-r \cdot \sin(u), r \cdot \cos(u), 0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &= (0, 0, 1) \\ \vec{N}(u, v) &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|} = (\cos(u), \sin(u), 0) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v) &= (-r \cdot \cos(u), -r \cdot \sin(u), 0) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v) &= (0, 0, 0) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v) &= (0, 0, 0) \end{aligned} \right.$$

temos:

$$\left\{ \begin{aligned} E(u, v) &= r^2, F(u, v) = 0, G(u, v) = 1 \\ e(u, v) &= -r, f(u, v) = 0, g(u, v) = 0 \end{aligned} \right.$$

Portanto, se $\vec{w} = a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ é um vetor tangente a φ em $q = \varphi(u_0, v_0)$, então:

$$\left\{ \begin{aligned} I_q(\vec{w}) &= a^2 \cdot r^2 + b^2, \\ II_q(\vec{w}) &= -a^2 \cdot r \end{aligned} \right.$$

Logo, para um vetor tangente não-nulo, $\vec{w}$, temos:

$$\kappa_n(\vec{w}) = \frac{-a^2 \cdot r}{a^2 \cdot r^2 + b^2}$$

Observamos que $\kappa_n(\vec{w}) \leq 0$ e a igualdade $\kappa_n(\vec{w}) = 0$ ocorre se, e somente se $a = 0$ e $b \neq 0$. Se $a \neq 0$, então:

$$\frac{a^2 \cdot r}{a^2 \cdot r^2 + b^2} \leq \frac{1}{r}$$

Portanto, $\kappa_n(\vec{w}) \geq -\frac{1}{r}$ e essa última igualdade ocorre quando $b = 0$. Concluimos que a função $\kappa_n : T_q S \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ admite um máximo e um mínimo nas direções de $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ e de $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$, respectivamente.

Exemplo 61 Considere a superfície parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, u^2 - v^2) \end{aligned}$$

que descreve o parabolóide hiperbólico. Calculando os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais em $q = \varphi(0, 0) = (0, 0, 0)$, obtemos:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) &= (1, 0, 2u) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &= (0, 1, -2v) \\ \vec{N}(u, v) &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|} = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v) &= (0, 0, 2) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v) &= (0, 0, 0) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v) &= (0, 0, -2) \end{aligned} \right.$$

temos:

$$\left\{ \begin{aligned} E(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = \langle (1, 0, 2u), (1, 0, 2u) \rangle = 1 + 4u^2 \\ F(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \langle (1, 0, 2u), (0, 1, -2v) \rangle = -4uv \\ G(u, v) &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \langle (0, 1, -2v), (0, 1, -2v) \rangle = 1 + 4v^2 \\ e(u, v) &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \vec{N}(u, v) \right\rangle = \left\langle (0, 0, 2), \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \\ f(u, v) &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), \vec{N}(u, v) \right\rangle = \left\langle (0, 0, 0), \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \right\rangle = 0 \\ g(u, v) &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v), \vec{N}(u, v) \right\rangle = \left\langle (0, 0, -2), \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \right\rangle = \frac{-2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \end{aligned} \right.$$

e portanto:

$$\begin{cases} E(0,0) = 1 + 4 \cdot 0^2 = 1, F(0,0) = -4 \cdot 0 \cdot 0, G(0,0) = 1 + 4 \cdot 0^2 = 1 \\ e(0,0) = \frac{2}{\sqrt{1 + 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2}} = 2, f(u,v) = 0, g(u,v) = \frac{-2}{\sqrt{1 + 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2}} = -2 \end{cases}$$

Portanto, se $\vec{w} = a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0) + b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0) \in T_q S$, temos:

$$I_q(\vec{w}) = a^2 \cdot 1 + 2 \cdot a \cdot b \cdot 0 + b^2 \cdot 1 = a^2 + b^2$$

$$II_q(\vec{w}) = \left\langle \vec{w}, \vec{N}(\varphi(0,0)) \right\rangle = -2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2$$

de modo que se $\vec{w} \neq \vec{0}$:

$$\kappa_n(\vec{w}) = \frac{II_q(\vec{w})}{I_q(\vec{w})} = \frac{-2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}$$

Concluimos que κ_n assume o valor máximo 2 e o valor mínimo -2 nas direções de $(0,1) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0,0)$ e $(1,0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0)$, respectivamente.

Exemplo 62 A superfície parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (u, v, u^3 - 3uv^2) \end{aligned}$$

é denominada “sela do macaco”. Temos:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) &= (1, 0, 3u^2 - 3v^2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) &= (0, 1, -6uv) \\ \vec{N}(u,v) &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\|} = \frac{(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)}{\|(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)\|} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u,v) &= (0, 0, 6u) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u,v) &= (0, 0, -6v) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u,v) &= (0, 0, -6u) \end{aligned} \right.$$

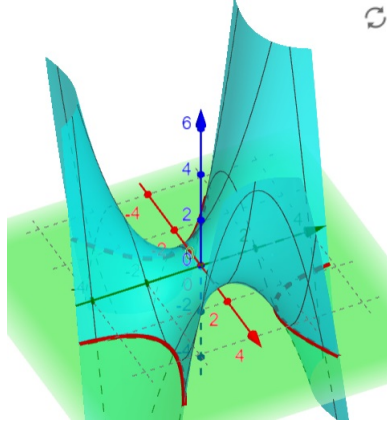


Figure 2: A sela do macaco. Você pode interagir melhor com esta superfície em <https://www.geogebra.org/m/efr6efgs>

e portanto:

$$\begin{cases} E(u, v) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = \langle (1, 0, 3u^2 - 3v^2), (1, 0, 3u^2 - 3v^2) \rangle = 1 + 9u^4 - 18u^2v^2 + 9v^4 \\ F(u, v) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \langle (1, 0, 3u^2 - 3v^2), (0, 1, -6uv) \rangle = -6uv \cdot (3u^2 - 3v^2) \\ G(u, v) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \langle (0, 1, -6uv), (0, 1, -6uv) \rangle = 1 + 36u^2v^2 \\ e(u, v) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \vec{N}(u, v) \right\rangle = \left\langle (0, 0, 6u), \frac{(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)}{\|(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)\|} \right\rangle = \frac{6u}{\|(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)\|} \\ f(u, v) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), \vec{N}(u, v) \right\rangle = \left\langle (0, 0, -6v), \frac{(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)}{\|(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)\|} \right\rangle = \frac{-6v}{\|(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)\|} \\ g(u, v) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v), \vec{N}(u, v) \right\rangle = \left\langle (0, 0, -6u), \frac{(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)}{\|(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)\|} \right\rangle = \frac{-6u}{\|(3v^2 - 3u^2, -6uv, 1)\|} \end{cases}$$

e portanto:

$$\begin{cases} E(0, 0) = 1, F(0, 0) = 0, G(0, 0) = 1 \\ e(0, 0) = 0, f(0, 0) = 0, g(0, 0) = 0 \end{cases}$$

de modo que a curvatura normal e a segunda forma fundamental são ambas funções nulas na origem.

7 Curvaturas Principais, Curvatura Gaussiana e Curvatura Média

Na seção anterior, apresentamos vários exemplos em que obtivemos explicitamente a função curvatura normal e verificamos que essa função admitia um máximo e um mínimo. Esse é

um resultado geral que provaremos na sequência. Os valores máximo e mínimo da função curvatura normal em um ponto q serão chamados curvaturas principais e, a partir destas, definiremos a curvatura Gaussiana e a curvatura média.

Neste seção denotaremos por E_0, F_0, G_0, e_0, f_0 e g_0 os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamentais de uma superfície regular parametrizada simples, (S, φ) em um ponto $\varphi(u_0, v_0)$.

Proposição 63 *Sejam (S, φ) uma superfície regular parametrizada simples e $\kappa_n : T_q S \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função curvatura normal de (S, φ) em $q = \varphi(u_0, v_0)$. Então existem vetores unitários e ortogonais, $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in T_q S$ tais que $k_1 = \kappa_n(\vec{w}_1)$ e $k_2 = \kappa_n(\vec{w}_2)$ são os valores mínimo e máximo da função κ_n .*

Se:

$$\begin{aligned} \kappa_n : T_q S \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{w} &\mapsto \frac{II_q(\vec{w})}{I_q(\vec{w})} \end{aligned}$$

for constante, então quaisquer vetores unitários ortogonais de $T_q S$ satisfazem as condições da tese.

Suponhamos que $\kappa_n : T_q S \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ não seja constante. Consideremos a função:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_n : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\mapsto \kappa_n \left(a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) + b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \right) \end{aligned}$$

isto é:

$$\tilde{\kappa}_n(a,b) = \frac{a^2 \cdot e_0 + 2ab \cdot f_0 + b^2 \cdot g_0}{a^2 \cdot E_0 + 2ab \cdot F_0 + b^2 \cdot G_0}$$

Esta função é diferenciável, já que $(a,b) \neq (0,0)$. Além disso, para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tem-se $\tilde{\kappa}_n(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b) = \tilde{\kappa}_n(a,b)$. Portanto, para obter os valores máximo e mínimo de $\tilde{\kappa}_n$, basta restringirmos $\tilde{\kappa}_n$ à circunferência $S^1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$.

Como $\tilde{\kappa}_n$ é contínua, então existem pontos $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in S^1$ tais que:

$$k_1 = \tilde{\kappa}_n(a_1, b_1) \text{ e } k_2 = \tilde{\kappa}_n(a_2, b_2) \quad (8)$$

são, respectivamente, o mínimo e o máximo da função $\tilde{\kappa}_n \upharpoonright_{S^1}$. Assim, para qualquer $(a,b) \in S^1$ tem-se:

$$k_1 \leq \tilde{\kappa}_n(a, b) \leq k_2,$$

Além disso, como κ_n não é constante, $k_1 < k_2$. Consideremos, agora, os vetores:

$$\vec{w}_1 = a_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) + b_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q)$$

$$\vec{w}_2 = a_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) + b_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q)$$

Pela própria definição de $\tilde{\kappa}_n$, temos que, para todo $\vec{w} \in T_q S \setminus \{0\}$,

$$k_1 = \kappa_n(\vec{w}_1) \leq \kappa_n(\vec{w}) \leq \kappa_n(\vec{w}_2) = k_2$$

Provemos, agora, que $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ são ortogonais. Como (a_1, b_1) e (a_2, b_2) dão o mínimo e o máximo da função $\tilde{\kappa}_n$, então as derivadas parciais de $\tilde{\kappa}_n$ são nulas nestes pontos. Calculando essas derivadas parciais e usando (8), obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\kappa}_n}{\partial a}(a_1, b_1) &= \\ &= \frac{(2a_1 e_0 + 2b_1 f_0) \cdot (a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1 b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0) - (a_1^2 \cdot e_0 + 2a_1 b_1 \cdot f_0 + b_1^2 \cdot g_0) \cdot (2a \cdot E_0 + 2b_1 \cdot F_0)}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1 b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)^2} = \\ &= \frac{2a_1 \cdot e_0 + 2b_1 \cdot f_0}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1 b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} - \frac{(2a_1 \cdot E_0 + 2b_1 \cdot F_0)}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1 b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} \cdot \frac{a_1^2 \cdot e_0 + 2a_1 b_1 \cdot f_0 + b_1^2 \cdot g_0}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1 b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} = \\ &= \frac{2a_1 \cdot e_0 + 2b_1 \cdot f_0}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1 b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} - \frac{(2a_1 \cdot E_0 + 2b_1 \cdot F_0)}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1 b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} \cdot k_1 = \\ &= \frac{2}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1 b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} \cdot (a_1 \cdot e_0 + b_1 \cdot f_0 - a_1 \cdot E_0 \cdot k_1 - b_1 \cdot F_0 \cdot k_1) = \\ &= \frac{2}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1 b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} \cdot [(e_0 - k_1 \cdot E_0) \cdot a_1 + (f_0 - k_1 \cdot F_0) \cdot b_1] = 0 \end{aligned}$$

donde podemos concluir que, como $\frac{2}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1 b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} \neq 0$:

$$(e_0 - k_1 \cdot E_0) \cdot a_1 + (f_0 - k_1 \cdot F_0) \cdot b_1 = 0, \quad (9)$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{\kappa}_n}{\partial a}(a_2, b_2) = \\
& = \frac{(2a_2e_0 + 2b_2f_0) \cdot (a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0) - (a_2^2 \cdot e_0 + 2a_2b_2 \cdot f_0 + b_2^2 \cdot g_0) \cdot (2a \cdot E_0 + 2b_2 \cdot F_0)}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)^2} = \\
& = \frac{2a_2 \cdot e_0 + 2b_2 \cdot f_0}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)} - \frac{(2a_2 \cdot E_0 + 2b_2 \cdot F_0)}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)} \cdot \frac{a_2^2 \cdot e_0 + 2a_2b_2 \cdot f_0 + b_2^2 \cdot g_0}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)} = \\
& = \frac{2a_2 \cdot e_0 + 2b_2 \cdot f_0}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)} - \frac{(2a_2 \cdot E_0 + 2b_2 \cdot F_0)}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)} \cdot k_2 = \\
& = \frac{2}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)} \cdot (a_2 \cdot e_0 + b_2 \cdot f_0 - a_2 \cdot E_0 \cdot k_2 - b_2 \cdot F_0 \cdot k_2) = \\
& = \frac{2}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)} \cdot [(e_0 - k_2 \cdot E_0) \cdot a_2 + (f_0 - k_2 \cdot F_0) \cdot b_2] = 0 \\
& (e_0 - k_2 \cdot E_0) \cdot a_2 + (f_0 - k_2 \cdot F_0) \cdot b_2 = 0, \tag{10}
\end{aligned}$$

Calculando a derivada parcial de $\tilde{\kappa}_n(a, b)$ com respeito a b é:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{\kappa}_n}{\partial b}(a_1, b_1) = \\
& = \frac{(2a_1f_0 + 2b_1g_0) \cdot (a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1b_1F_0 + b_1^2G_0) - (a_1^2 \cdot e_0 + 2a_1b_1 \cdot f_0 + b_1^2 \cdot g_0) \cdot (2a_1F_0 + 2b_1G_0)}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)^2} = \\
& = \frac{(2a_1f_0 + 2b_1g_0)}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} - k_1 \cdot \frac{(2a_1F_0 + 2b_1G_0)}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} = \\
& = \frac{2}{(a_1^2 \cdot E_0 + 2a_1b_1 \cdot F_0 + b_1^2 \cdot G_0)} \cdot [(f_0 - k_1 \cdot F_0) \cdot a_1 + (g_0 - k_1 \cdot G_0) \cdot b_1] = 0
\end{aligned}$$

donde segue que:

$$(f_0 - k_1 \cdot F_0) \cdot a_1 + (g_0 - k_1 \cdot G_0) \cdot b_1 = 0, \tag{11}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{\kappa}_n(a_2, b_2)}{\partial b} = \\
& = \frac{(2a_2f_0 + 2b_2g_0) \cdot (a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2F_0 + b_2^2G_0) - (a_2^2 \cdot e_0 + 2a_2b_2 \cdot f_0 + b_2^2 \cdot g_0) \cdot (2a_2F_0 + 2b_2G_0)}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)^2} = \\
& = \frac{(2a_2f_0 + 2b_2g_0)}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)} - k_2 \cdot \frac{(2a_2F_0 + 2b_2G_0)}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)} = \\
& = \frac{2}{(a_2^2 \cdot E_0 + 2a_2b_2 \cdot F_0 + b_2^2 \cdot G_0)} \cdot [(f_0 - k_2 \cdot F_0) \cdot a_2 + (g_0 - k_2 \cdot G_0) \cdot b_2] = 0
\end{aligned}$$

donde segue que:

$$(f_0 - k_2 \cdot F_0) \cdot a_2 + (g_0 - k_2 \cdot G_0) \cdot b_2 = 0, \quad (12)$$

Se a_1, a_2, b_1, b_2 são não-nulos, então multiplicando (10) por a_1 :

$$(e_0 - k_2 \cdot E_0) \cdot a_1 \cdot a_2 + (f_0 - k_2 \cdot F_0) \cdot a_1 \cdot b_2 = 0$$

multiplicamos (9) por a_2 :

$$(e_0 - k_1 \cdot E_0) \cdot a_1 \cdot a_2 + (f_0 - k_1 \cdot F_0) \cdot a_2 \cdot b_1 = 0$$

Subtraindo uma das equações acima da outra:

$$(e_0 - k_2 \cdot E_0) \cdot a_1 \cdot a_2 + (f_0 - k_2 \cdot F_0) \cdot a_1 \cdot b_2 - (e_0 - k_1 \cdot E_0) \cdot a_1 \cdot a_2 - (f_0 - k_1 \cdot F_0) \cdot a_2 \cdot b_1 = 0$$

Em seguida, multiplicamos (12) por b_1 , obtemos:

$$(f_0 - k_2 \cdot F_0) \cdot a_2 \cdot b_1 + (g_0 - k_2 \cdot G_0) \cdot b_2 \cdot b_1 = 0$$

e multiplicamos (11) por b_2 :

$$(f_0 - k_1 \cdot F_0) \cdot a_1 \cdot b_2 + (g_0 - k_1 \cdot G_0) \cdot b_1 \cdot b_2 = 0$$

Subtraindo uma da outra, obtemos:

$$(f_0 - k_2 \cdot F_0) \cdot a_2 \cdot b_1 + (g_0 - k_2 \cdot G_0) \cdot b_2 \cdot b_1 - (f_0 - k_1 \cdot F_0) \cdot a_1 \cdot b_2 - (g_0 - k_1 \cdot G_0) \cdot b_1 \cdot b_2 = 0$$

Somando as equações obtidas, temos que:

$$(f_0 - k_1 \cdot F_0) \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) + (f_0 - k_2 \cdot F_0) \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) = 0$$

$$(f_0 - k_1 \cdot F_0) \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) + (f_0 - k_2 \cdot F_0) \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) = 0$$

$$(k_1 - k_2) \cdot (a_1 a_2 E_0 + a_1 b_2 F_0 + a_2 b_1 F_0 + b_1 b_2 G_0) = 0$$

Como $k_1 \neq k_2$, concluímos que:

$$a_1 a_2 E_0 + a_1 b_2 F_0 + a_2 b_1 F_0 + b_1 b_2 G_0 = 0$$

isto é:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \right\rangle + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle + \\ + b_1 b_2 \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Observando que o primeiro membro da igualdade acima é igual a:

$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = \left\langle a_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + b_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), a_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + b_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle$$

concluimos que:

$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = a_1 a_2 E_0 + a_1 b_2 F_0 + a_2 b_1 F_0 + b_1 b_2 G_0 = 0$$

De um modo análogo, prova-se que $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ são ortogonais quando algum dos números a_1, a_2, b_1, b_2 se anula. Observemos que obtivemos dois vetores ortogonais, $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, não necessariamente unitários (embora $a_i^2 + b_i^2 = 1, i \in \{1, 2\}$) que dão o mínimo e o máximo da função κ_n . Considerando:

$$w_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} \text{ e } w_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}$$

Como $\kappa_n(\lambda \cdot w) = \kappa_n(w)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, concluímos que w_1 e w_2 satisfazem as condições da tese desta proposição.

Com a notação da proposição anterior, os vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ são chamados **vetores principais da superfície S em q** , e as curvaturas k_1 e k_2 são denominadas **curvaturas principais de S em q** . As direções de $T_q S$ determinadas pelos vetores principais são denominadas **direções principais**.

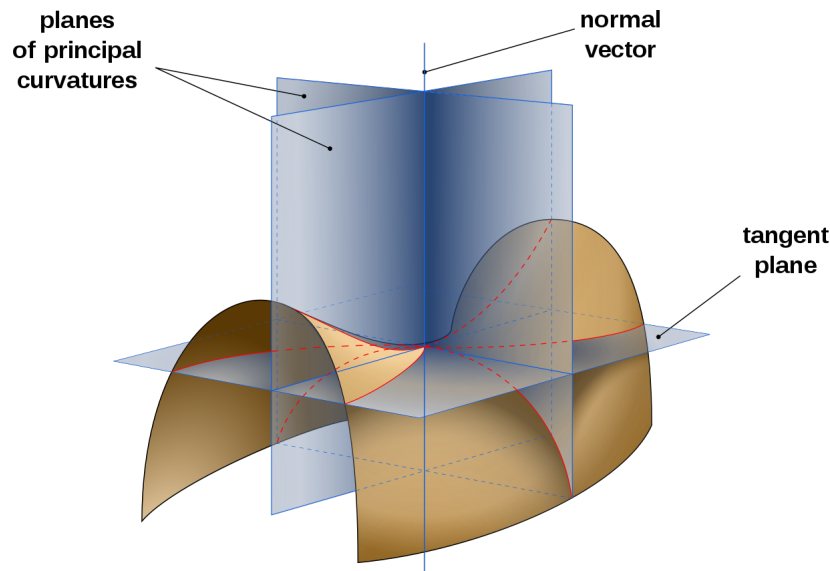


Figure 3: Curvas principais.

Definição 64 (curvatura gaussiana e curvatura média) Sejam (S, φ) uma superfície regular parametrizada simples e $q \in S$. O produto das curvaturas principais em um ponto $q \in S$:

$$\kappa(q) = k_1 \cdot k_2$$

é denominado a **curvatura gaussiana** de S em q , enquanto que a semi-soma:

$$H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

é chamada **curvatura média** de S em q .

Exemplo 65 Vimos que a esfera de raio $a > 0$ descrita pela parametrização:

$$\begin{aligned} \varphi : U = \mathbb{R} \times]0, \pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (a \cdot \sin(v) \cdot \cos(u), a \cdot \sin(v) \cdot \sin(u), a \cdot \cos(v)) \end{aligned}$$

tem a curvatura normal constante, $\kappa_n = \frac{1}{a}$. Além disso, em qualquer ponto $(u, v) \in U$, todo vetor tangente é um vetor principal, e as curvaturas principais são $k_1 = k_2 = \frac{1}{a}$. Concluimos que:

$$\kappa = \frac{1}{a^2} \text{ e } H = \frac{1}{a}$$

Exemplo 66 Considere o cilindro circular descrito por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (r \cdot \cos(u), r \cdot \sin(u), v) \end{aligned}$$

Sabemos que dado qualquer $q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, a curvatura normal satisfaz:

$$-\frac{1}{r} \leq \kappa_n \leq 0$$

e assume o mínimo e o máximo nas direções tangentes às curvas coordenadas. Portanto, considerando os vetores unitários nessas direções, temos que:

$$\vec{w}_1 = (-\sin(u), \cos(u), 0) \text{ e } \vec{w}_2 = (0, 0, 1)$$

são os vetores principais em $q = (u, v)$ e $k_1 = \kappa_n(\vec{w}_1) = -\frac{1}{r}$, $k_2 = \kappa_n(\vec{w}_2) = 0$ são as curvaturas principais. Portanto:

$$\kappa = 0 \text{ e } H = -\frac{1}{2r}$$

Exemplo 67 Quanto à sela do macaco, parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, u^3 - 3uv^2) \end{aligned}$$

vimos que a curvatura normal da superfície em $(0, 0)$ é identicamente nula. Portanto, as curvaturas principais em $(0, 0, 0)$ são nulas, e $\kappa(0, 0, 0) = H(0, 0, 0) = 0$.

Mais adiante, usando a demonstração da proposição anterior, obteremos um método algébrico para calcular as curvaturas principais a partir dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais. Antes, porém, vamos provar que as curvaturas principais k_1 e k_2 , determinam a curvatura normal em qualquer direção.

Proposição 68 (Fórmula de Euler) Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples, $q = (u_0, v_0) \in U$ e k_1 e k_2 as curvaturas principais de S em $\varphi(q)$, e $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ os vetores principais em $\varphi(q)$. Para todo vetor $\vec{w} \in T_{\varphi(q)}S$ tal que $\|\vec{w}\| = 1$, se:

$$\vec{w} = \cos(\theta) \cdot \vec{w}_1 + \sin(\theta) \cdot \vec{w}_2,$$

então

$$\kappa_n(\vec{w}) = k_1^2 \cdot \cos^2(\theta) + k_2 \cdot \sin^2(\theta)$$

Consideremos:

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = a_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) + b_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \\ \vec{w}_2 = a_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) + b_2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \end{cases}$$

tais que $k_1 \leq \kappa_n(\vec{w}_1) \leq \kappa_n(\vec{w}_2) = k_2$. Como $\vec{w} = \cos(\theta) \cdot \vec{w}_1 + \sin(\theta) \cdot \vec{w}_2$, temos que:

$$\vec{w} = (\cos(\theta) \cdot a_1 + \sin(\theta) \cdot a_2) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) + (\cos(\theta) \cdot b_1 + \sin(\theta) \cdot b_2) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \kappa_n(\vec{w}) = & (\cos(\theta) \cdot a_1 + \sin(\theta) \cdot a_2)^2 \cdot e_0 + \\ & + 2 \cdot (\cos(\theta) \cdot a_1 + \sin(\theta) \cdot a_2) \cdot (\cos(\theta) \cdot b_1 + \sin(\theta) \cdot b_2) \cdot f_0 + \\ & + (\cos(\theta) \cdot b_1 + \sin(\theta) \cdot b_2)^2 \cdot g_0 \end{aligned}$$

em que e_0, f_0 e g_0 são os coeficientes da segunda forma fundamental de S em q . Desenvolvendo a expressão acima, obtemos que:

$$\kappa_n(\vec{w}) = \cos^2(\theta) \cdot k_1 + \sin^2(\theta) \cdot k_2 + 2 \cdot A \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

em que:

$$A = a_1 \cdot a_2 \cdot e_0 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot f_0 + b_1 \cdot b_2 \cdot g_0$$

Afirmção: $A = 0$.

Como $\kappa_n(\vec{w}) \leq k_2$, temos que, para todo θ :

$$\cos^2(\theta) \cdot k_1 + \sin^2(\theta) \cdot k_2 + 2A \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \leq k_2 = k_2 \cdot \sin^2(\theta) + k_2 \cdot \cos^2(\theta)$$

de modo que:

$$\cos^2(\theta) \cdot (k_2 - k_1) - 2A \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \geq 0$$

Portanto, para todo $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, dividindo ambos os membros por $\cos^2(\theta)$, obtemos:

$$(k_2 - k_1) - 2A \cdot \tan(\theta) \geq 0 \tag{13}$$

Suponhamos que $A \neq 0$. Se $A > 0$, então existe $\theta = \frac{\pi}{2} - \lambda$, λ suficientemente pequeno, tal que $2 \cdot A \cdot \tan(\theta) > k_2 - k_1$, o que contradiz (13). Analogamente, se $A < 0$, então existe $\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda$ tal que $2A \tan(\theta) > k_2 - k_1$, o que novamente contradiz (13). Concluimos que $A = 0$. Portanto:

$$\kappa_n(\vec{w}) = \cos^2(\theta) \cdot k_1 + \sin^2(\theta) \cdot k_2$$

Na proposição seguinte, obteremos a curvatura média e a curvatura gaussiana a partir dos coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais.

Proposição 69 *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície parametrizada simples e seja $(u_0, v_0) \in U$. Denotando por $q = \varphi(u_0, v_0)$, então:*

$$H(q) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e_0 \cdot G_0 - 2 \cdot f_0 \cdot F_0 + E_0 \cdot g_0}{E_0 \cdot G_0 - F_0^2}$$

$$\kappa(q) = \frac{e_0 \cdot g_0 - f_0^2}{E_0 \cdot G_0 - F_0^2}$$

Se um número real k_0 é uma curvatura principal em q , na direção de $\vec{w} = a_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) + b_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q)$, então temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} (e_0 - k_0 \cdot E_0) \cdot a_0 + (f_0 - k_0 \cdot F_0) \cdot b_0 = 0 \\ (f_0 - k_0 \cdot F_0) \cdot a_0 + (g_0 - k_0 \cdot G_0) \cdot b_0 = 0 \end{cases}$$

De fato, como na demonstração da **Proposição 63**, como k_0 é o valor mínimo ou máximo da função:

$$\frac{a^2 \cdot e_0 + 2ab \cdot f_0 + b^2 \cdot g_0}{a^2 \cdot E_0 + 2ab \cdot F_0 + b^2 \cdot G_0}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus (a, b)$$

em (a_0, b_0) , obtemos o sistema de equações acima calculando as derivadas parciais dessa função em (a_0, b_0) .

Segue-se do fato de que (a_0, b_0) é uma solução não trivial do sistema com determinante:

$$\begin{vmatrix} e_0 - k_0 \cdot E_0 & f_0 - k_0 \cdot F_0 \\ f_0 - k_0 \cdot F_0 & g_0 - k_0 \cdot G_0 \end{vmatrix} = 0,$$

isto é, k_0 satisfaz a equação:

$$x^2 - \frac{a^2 \cdot e_0 + 2ab \cdot f_0 + b^2 \cdot g_0}{a^2 \cdot E_0 + 2ab \cdot F_0 + b^2 \cdot G_0} \cdot x + \frac{e_0 \cdot g_0 - f_0^2}{E_0 \cdot G_0 - F_0^2} = 0$$

Pela relação entre os coeficientes de uma equação do segundo grau e as raízes da equação, concluímos que:

$$H(q) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e_0 \cdot G_0 - 2 \cdot f_0 \cdot F_0 + E_0 \cdot g_0}{E_0 \cdot G_0 - F_0^2}$$

$$\kappa(q) = \frac{e_0 \cdot g_0 - f_0^2}{E_0 \cdot G_0 - F_0^2}$$

A proposição que acabamos de demonstrar nos permite calcular a curvatura gaussiana e a curvatura média de uma superfície regular parametrizada $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ em qualquer ponto $(u_0, v_0) \in U$ a partir dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas. Em seguida, resolvendo a equação:

$$x^2 - 2 \cdot H(\varphi(u, v)) + \kappa(\varphi(u, v)) = 0$$

obtemos as curvaturas principais, k_1 e k_2 da superfície. A seguir, veremos como obter os vetores principais de k_1 e k_2 .

Proposição 70 *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície parametrizada regular. Um vetor não-nulo $\vec{w} = a_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) + b_0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q)$ tangente a S em $q = \varphi(u_0, v_0)$ é uma direção principal de curvatura principal k_0 se, e somente se, a_0 e b_0 são soluções do seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} (e_0 - k_0 \cdot E_0) \cdot a_0 + (f_0 - k_0 \cdot F_0) \cdot b_0 = 0 \\ (f_0 - k_0 \cdot F_0) \cdot a_0 + (g_0 - k_0 \cdot G_0) \cdot b_0 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Se $\vec{w}$ é uma direção principal e $k_0 = \kappa_n(\vec{w})$ é uma curvatura principal, então já vimos na demonstração da proposição anterior que (14) se verifica.

Reciprocamente, se a_0 e b_0 satisfazem (14), então como (a_0, b_0) é uma solução não-trivial de (14),

$$\begin{vmatrix} e_0 - k_0 \cdot E_0 & f_0 - k_0 \cdot F_0 \\ f_0 - k_0 \cdot F_0 & g_0 - k_0 \cdot G_0 \end{vmatrix} = 0$$

Concluimos, usando a demonstração da **Proposição 69**, que k_0 é uma curvatura principal.

Para provar que $\vec{w}$ é uma direção principal, vamos provar que $\kappa_n(\vec{w}) = k_0$. Suponhamos que a_0 e b_0 sejam não-nulos. Somando a primeira equação de (14) multiplicada por a_0 com a segunda multiplicada por b_0 , obtemos:

$$\begin{aligned} (e_0 - k_0 \cdot E_0) \cdot a_0^2 + (f_0 - k_0 \cdot F_0) \cdot a_0 \cdot b_0 &= 0 \\ (f_0 - k_0 \cdot F_0) \cdot a_0 \cdot b_0 + (g_0 - k_0 \cdot G_0) \cdot b_0^2 &= 0 \\ \hline e_0 \cdot a_0^2 + 2f_0 a_0 \cdot b_0 + g_0 \cdot b_0^2 &= k_0 \cdot (E_0 \cdot a_0^2 + 2F_0 \cdot a_0 \cdot b_0 + G_0 \cdot b_0^2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\kappa_n(\vec{w}) = \frac{e_0 \cdot a_0^2 + 2 \cdot f_0 \cdot a_0 \cdot b_0 + g_0 \cdot b_0^2}{E_0 \cdot a_0^2 + 2 \cdot F_0 \cdot a_0 \cdot b_0 + G_0 \cdot b_0^2} = k_0$$

Se $a_0 = 0$ ou $b_0 = 0$, obtém-se facilmente que $\kappa_n(\vec{w}) = k_0$.

Observamos que as soluções do sistema (14) fornecem direções principais. Para obter os vetores principais, basta considerar os vetores unitários nessas direções.

Exemplo 71 Considere o parabolóide hiperbólico (sela) parametrizado por:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, v^2 - u^2) \end{aligned}$$

Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (1, 0, -2u) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 2v) \\ \vec{N}(u, v) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|} = \frac{(2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v) = (0, 0, -2) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v) = (0, 0, 0) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v) = (0, 0, 2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\varphi(u, v)) = \langle (1, 0, -2u), (1, 0, -2u) \rangle = 1 + 2u^2 \\ F(\varphi(u, v)) = \langle (1, 0, -2u), (0, 1, 2v) \rangle = -2uv \\ G(\varphi(u, v)) = \langle (0, 1, 2v), (0, 1, 2v) \rangle = 1 + 4v^2 \\ e(\varphi(u, v)) = \left\langle (0, 0, -2), \frac{(2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \\ f(\varphi(u, v)) = \left\langle (0, 0, 0), \frac{(2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \right\rangle = 0 \\ g(\varphi(u, v)) = \left\langle (0, 0, 2), \frac{(2u, -2v, 1)}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} E(\varphi(0,0)) = \langle (1,0,0), (1,0,0) \rangle = 1 \\ F(\varphi(0,0)) = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = 0 \\ G(\varphi(0,0)) = \langle (0,1,0), (0,1,0) \rangle = 1 + 0^2 = 1 + 0^2 = 1 \\ e(\varphi(0,0)) = \left\langle (0,0,-2), \frac{(0,0,1)}{\sqrt{1+4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2}} \right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{1+4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2}} = -2 \\ f(\varphi(0,0)) = \left\langle (0,0,0), \frac{(0,0,1)}{\sqrt{1+4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2}} \right\rangle = 0 \\ g(\varphi(0,0)) = \left\langle (0,0,2), \frac{(0,0,1)}{\sqrt{1+4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2}} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{1+4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^2}} = 2 \end{cases}$$

Segue da **Proposição 69** que $H(\varphi(0,0)) = 0$ e $\kappa(\varphi(0,0)) = -4$. Considerando as soluções da equação $x^2 - 4 = 0$, concluímos que as curvaturas principais em $\varphi(0,0)$ são $k_1 = -2$ e $k_2 = 2$. Portanto, obtemos o vetor principal $\vec{w}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0) = (1,0,0)$ para $k_1 = -2$ e $\vec{w}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,0) = (0,1,0)$ para $k_2 = 2$.

8 Classificação dos Pontos de Uma Superfície

Nesta seção, veremos que o sinal da curvatura gaussiana em um ponto $q = \varphi(u_0, v_0)$ permite o estudo do comportamento da superfície em pontos próximos de $q = \varphi(u_0, v_0)$.

Definição 72 Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples. Dizemos que $q = \varphi(u, v)$ é um ponto:

- (a) *elíptico*, se $\kappa(q) > 0$;
- (b) *hiperbólico*, se $\kappa(q) < 0$;
- (c) *parabólico*, se $\kappa(q) = 0$ e $H(q) \neq 0$;
- (d) *planar*, se $\kappa(q) = 0$ e $H(q) = 0$

Exemplo 73 Todos os pontos de uma esfera são elípticos.

Exemplo 74 A origem do parabolóide hiperbólico é um ponto hiperbólico.

Exemplo 75 Todo ponto de um cilindro é parabólico.

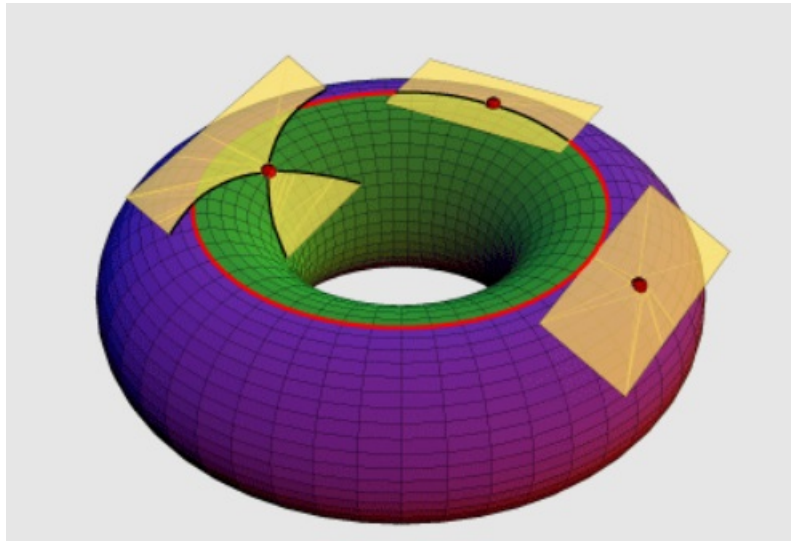
Exemplo 76 Todo ponto do plano é planar.

Exemplo 77 A origem da sela do macaco é um ponto planar.

Exemplo 78 O toro, parametrizado por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto ((a + r \cdot \cos(u)) \cdot \cos(v), (a + r \cdot \cos(u)) \cdot \sin(v), r \cdot \sin(u)) \end{aligned}$$

em que $0 < r < a$, tem pontos elípticos quando $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, pontos parabólicos quando $u = \frac{\pi}{2}$ ou $u = \frac{3\pi}{2}$, e pontos hiperbólicos quando $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$



Na figura a seguir, os pontos em vermelho são parabólicos, os pontos verdes são hiperbólicos e os púrpuras são elípticos. (ver [5]).

Sejam $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples e $q = \varphi(u_0, v_0)$. O sinal da curvatura de S em q permite determinar, para (u, v) próximo de (u_0, v_0) , a posição do ponto $\varphi(u, v)$ com respeito ao plano tangente a S em q .

Se $\vec{N}_q = \vec{N}(u_0, v_0)$ é o vetor unitário normal à superfície em q , podemos identificar $T_q S$ com o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa por $\varphi(u_0, v_0)$ ortogonal a $\vec{N}_q$. Com essa identificação, denominamos os conjuntos:

$$\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \varphi(u_0, v_0), \vec{N}_q \rangle > 0\}$$

$$\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \varphi(u_0, v_0), \vec{N}_q \rangle < 0\}$$

$$\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \varphi(u_0, v_0), \vec{N}_q \rangle \geq 0\}$$

$$\{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \varphi(u_0, v_0), \vec{N}_q \rangle \leq 0\}$$

de semiespaços determinados por $T_q S$.

Em um ponto elíptico, as curvaturas principais têm sinais iguais, portanto as concavidades das curvas da superfície neste ponto são voltadas para um mesmo semiespaço determinado por $T_q S$. Em um ponto hiperbólico, como as curvaturas têm sinais distintos, existem curvas na superfície cujas concavidades estão voltadas para os dois semiespaços distintos determinados por $T_q S$.

9 Linhas de Curvatura e Linhas Assintóticas

Se $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ é uma superfície regular parametrizada e se $a_1, a_2 : I \rightarrow U$ são funções suaves, então:

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow S \\ t &\mapsto \varphi(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

é uma curva da superfície S . Se α é regular, dizemos que α é uma **curva regular da superfície**. Dentre as diversas curvas regulares de uma superfície, vamos apresentar três tipos de curvas que merecem um estudo especial.

Definição 79 (linha de curvatura) *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples. Uma curva regular:*

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow S \\ t &\mapsto \varphi(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

*é uma **linha de curvatura** da superfície S se, para todo $t \in I$, $\alpha'(t)$ é uma direção principal de S em $\alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t))$.*

Exemplo 80 *Toda curva regular de um plano é uma linha de curvatura;*

Exemplo 81 *Toda curva regular de uma esfera é uma linha de curvatura, já que toda direção tangente é principal.*

Exemplo 82 *Os paralelos e os meridianos de uma superfície de revolução são linhas de curvatura.*

A seguir, vamos obter as equações diferenciais que permitem determinar as linhas de curvatura de uma superfície.

Proposição 83 *Seja:*

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow S \\ t &\mapsto \varphi(a_1(t), a_2(t))\end{aligned}$$

uma curva regular de uma superfície regular parametrizada simples, $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$. Então α é linha de curvatura se, e somente se, $a_1, a_2 : I \rightarrow S$ satisfazem:

$$\begin{vmatrix} (a'_2) & -a'_1 \cdot a'_2 & (a'_2)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

em que E, F, G, e, f e g são os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamentais de S em $\alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t))$.

Segue da **Proposição 70** que o vetor não-nulo:

$$\alpha'(t) = a'_1(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) + a'_2(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t))$$

é uma direção principal se, e somente se,

$$\begin{cases} (e - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot E) \cdot a'_1(t) + (f - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot F) \cdot a'_2(t) = 0, \\ (f - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot F) \cdot a'_1(t) + (g - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot G) \cdot a'_2(t) = 0 \end{cases}$$

Desenvolvendo a primeira equação, obtemos:

$$e \cdot a'_1(t) + f \cdot a'_2(t) = -\kappa_n(\alpha(t)) \cdot [E \cdot a'_1(t) + F \cdot a'_2(t)]$$

$$\frac{e \cdot a'_1(t) + f \cdot a'_2(t)}{E \cdot a'_1(t) + F \cdot a'_2(t)} = -\kappa(\alpha(t))$$

Desenvolvendo a segunda equação, obtemos:

$$f \cdot a'_1(t) + g \cdot a'_2(t) = -\kappa_n(\alpha(t)) \cdot [F \cdot a'_1(t) + G \cdot a'_2(t)]$$

$$\frac{f \cdot a'_1(t) + g \cdot a'_2(t)}{F \cdot a'_1(t) + G \cdot a'_2(t)} = -\kappa(\alpha(t))$$

assim:

$$\frac{e \cdot a'_1(t) + f \cdot a'_2(t)}{E \cdot a'_1(t) + F \cdot a'_2(t)} = \frac{f \cdot a'_1(t) + g \cdot a'_2(t)}{F \cdot a'_1(t) + G \cdot a'_2(t)}$$

ou seja, tem-se:

$$(e \cdot a'_1(t) + f \cdot a'_2(t)) \cdot (F \cdot a'_1(t) + G \cdot a'_2(t)) = (E \cdot a'_1(t) + F \cdot a'_2(t)) \cdot (f \cdot a'_1(t) + g \cdot a'_2(t))$$

$$e \cdot F \cdot [a'_1(t)]^2 + e \cdot G \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + \cancel{f \cdot F \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t)} + f \cdot G \cdot [a'_2(t)]^2 =$$

$$= E \cdot f \cdot [a'_1(t)]^2 + E \cdot g \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + \cancel{F \cdot f \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t)} + F \cdot g \cdot [a'_2(t)]^2$$

$$(e \cdot F - E \cdot f) \cdot [a'_1(t)]^2 + (e \cdot G - E \cdot g) \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + (f \cdot G - F \cdot g) \cdot [a'_2(t)]^2 = 0$$

que pode ser reescrita como:

$$\begin{vmatrix} (a'_2) & -a'_1 \cdot a'_2 & (a'_2)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

em que os coeficientes das formas quadráticas estão sendo considerados em $(a_1(t), a_2(t))$. Eliminando $\kappa_n(\alpha'(t))$ nas equações acima, obtemos que α é uma linha de curvatura se, e somente se, as funções $a_1(t)$ e $a_2(t)$ satisfazem (15).

Exemplo 84 Considerando o helicóide parametrizado por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), v) \end{aligned}$$

vamos determinar suas linhas de curvatura. Os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais são dados por:

$$\begin{cases} E(u, v) = 1, F(u, v) = 0, G(u, v) = 1 + u^2 \\ e(u, v) = 0, f(u, v) = -\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}, g(u, v) = 0 \end{cases}$$

Segue-se da proposição anterior que uma curva:

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow S \\ t &\mapsto \varphi(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

é uma linha de curvatura se, e somente se, $a_1, a_2 : I \rightarrow S$ satisfizerem:

$$\frac{1 + a_1(t)^2}{\sqrt{1 + a_1(t)^2}} \cdot [a_2'(t)]^2 - \frac{1}{\sqrt{1 + a_1(t)^2}} \cdot [a_1'(t)] = 0$$

o que é equivalente a dizer que a_1 e a_2 satisfazem uma das seguintes equações:

$$\begin{cases} a_2'(t) = \frac{a_1'(t)}{\sqrt{1 + a_1(t)^2}} \\ a_2'(t) = -\frac{a_1'(t)}{\sqrt{1 + a_1(t)^2}} \end{cases}$$

Resolvendo:

$$a_2'(t) = \frac{a_1'(t)}{\sqrt{1 + a_1(t)^2}}$$

obtemos:

$$a_1(t) = \sinh(t + b), a_2(t) = a + t$$

e resolvendo:

$$a_2'(t) = -\frac{a_1'(t)}{\sqrt{1 + a_1(t)^2}},$$

obtemos:

$$\bar{a}_1(t) = \sinh(t + b), a_2(t) = a - t,$$

em que a, b são constantes quaisquer. Portanto, concluímos que as linhas de curvatura do helicóide são dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \varphi(\sinh(t + b), a + t) = (\sinh(t + b) \cdot \cos(a + t), \sinh(t + b) \cdot \sin(a + t), a + t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \varphi(\sinh(t + b), a - t) = (\sinh(t + b) \cdot \cos(a - t), \sinh(t + b) \cdot \sin(a - t), a - t) \end{aligned}$$

Lema 85 Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples e $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação normal de Gauss. Então:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, N \right\rangle = -e \quad (16)$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, N \right\rangle = -f \quad (17)$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}, N \right\rangle = -f \quad (18)$$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, N \right\rangle = -g \quad (19)$$

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, N \right\rangle = 0 \quad (20)$$

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, N \right\rangle = 0 \quad (21)$$

Note que para qualquer $(u, v) \in U$, temos:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), N(u, v) \right\rangle = 0$$

Derivando a equação acima com respeito a u , obtemos:

$$\underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), N(u, v) \right\rangle}_{=e} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) \right\rangle = 0$$

Derivando a equação com respeito a v , obtemos:

$$\underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), N(u, v) \right\rangle}_{=f} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) \right\rangle = 0$$

Observe que, para qualquer $(u, v) \in U$, vale:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), N(u, v) \right\rangle = 0$$

e derivando os dois membros da equação acima com respeito a u , obtemos:

$$\overbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}(u, v), N(u, v) \right\rangle}^{=f} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) \right\rangle = 0$$

e derivando com respeito a v , obtemos:

$$\overbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v), N(u, v) \right\rangle}^{=g} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) \right\rangle = 0$$

Finalmente, derivando os dois membros de:

$$\langle N(u, v), N(u, v) \rangle = 1$$

com respeito a u , obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}(u, v), N(u, v) \right\rangle = 0$$

com respeito a v , obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}(u, v), N(u, v) \right\rangle = 0$$

A proposição a seguir permite uma outra caracterização das linhas de curvatura:

Proposição 86 (Fórmula de Olinde Rodrigues) *Seja $\alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t))$, $t \in I$ uma curva regular de uma superfície parametrizada regular, $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$. Então $\alpha : I \rightarrow S$ é uma linha de curvatura de S se, e somente se, existir uma função $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in I$:*

$$\frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)) + \lambda(t) \cdot \alpha'(t) = 0$$

Suponha que $\alpha : I \rightarrow S$ seja uma linha de curvatura. Considere a função:

$$\begin{aligned} \lambda : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \kappa_n(\alpha'(t)) \end{aligned}$$

Vamos verificar que, para todo $t \in I$, o vetor tangente a S em $\varphi(a_1(t), a_2(t))$, definido por:

$$w(t) = \frac{dN}{dt} + \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot \alpha'(t)$$

é nulo ($\frac{dN}{dt}$ é tangente a S porque N é unitário, e w é combinação linear de vetores tangentes). Para isto, vamos verificar que o produto escalar de $w(t)$ com cada vetor da base do plano tangente é zero (ou seja, que suas coordenadas são nulas).

De fato, pela **Regra da Cadeia**, temos:

$$w(t) = \frac{\partial N}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_1(t) + \frac{\partial N}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_2(t) + \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_1(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_2(t) \right)$$

O produto escalar de $w(t)$ pelo primeiro vetor da base do plano tangente é:

$$\begin{aligned} \left\langle w(t), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle &= a'_1(t) \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\ &+ a'_2(t) \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\ &+ \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot a'_1(t) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\ &+ \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot a'_2(t) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = \\ &= -e \cdot a'_1(t) - f \cdot a'_2(t) + \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot a'_1(t) \cdot E + \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot a'_2(t) \cdot F = \\ &= -(e - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot E) \cdot a'_1(t) - (f - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot F) \cdot a'_2(t) \end{aligned}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} \left\langle w(t), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle &= a'_1(t) \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\ &+ a'_2(t) \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\ &+ \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot a'_1(t) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\ &+ \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot a'_2(t) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = \\ &= -f \cdot a'_1(t) - g \cdot a'_2(t) + \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot a'_1(t) \cdot F + \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot a'_2(t) \cdot G = \\ &= -(f - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot F) \cdot a'_1(t) - (g - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot G) \cdot a'_2(t) \end{aligned}$$

Como $\alpha'(t)$ é uma direção principal de curvatura principal $\kappa_n(\alpha'(t))$ para todo $t \in I$, decorre da **Proposição 70** que as equações (14) são satisfeitas por $(a'_1(t), a'_2(t))$, ou seja,

$$\begin{cases} (e - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot E) \cdot a'_1(t) + (f - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot F) \cdot a'_2(t) = 0 \\ (f - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot F) \cdot a'_1(t) + (g - \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot G) \cdot a'_2(t) = 0 \end{cases}$$

donde podemos concluir que:

$$\begin{cases} \left\langle w(t), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0 \\ \left\langle w(t), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0 \end{cases}$$

e portanto:

$$(\forall t \in I) \left(\frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)) + \lambda(t) \cdot \alpha'(t) = \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)) + \kappa_n(\alpha'(t)) \cdot \alpha'(t) = w(t) = 0 \right)$$

Assim, se $\alpha : I \rightarrow S$ é uma linha de curvatura, existe $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$(\forall t \in I) \left(\frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)) + \lambda(t) \cdot \alpha'(t) = 0 \right)$$

Reciprocamente, suponhamos que $\alpha : I \rightarrow S$ seja uma curva regular tal que existe uma função $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$(\forall t \in I) \left(\frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)) + \lambda(t) \cdot \alpha'(t) = 0 \right) \quad (22)$$

Então, tomando o produto interno dos dois membros da equação acima por $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t))$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)) + \lambda(t) \cdot \alpha'(t), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0 \\ & \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \lambda(t) \cdot \left\langle \alpha'(t), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0 \\ & \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\ & + \lambda(t) \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_1(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_2(t), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\
& + \lambda(t) \cdot a'_1(t) \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \lambda(t) \cdot a'_2(t) \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = \\
& = \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \lambda(t) \cdot a'_1(t) \cdot E + \lambda(t) \cdot a'_2(t) \cdot F \quad (23)
\end{aligned}$$

Observe agora que, como para todo $t \in I$, tem-se:

$$\left\langle N(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0$$

então:

$$\frac{d}{dt} \left\langle N(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\
& + \left\langle N(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_1(t) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_2(t) \right\rangle = \\
& = \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\
& + a'_1(t) \cdot \left\langle N(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + a'_2(t) \cdot \left\langle N(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = \\
& = \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + a'_1(t) \cdot e + a'_2(t) \cdot f
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = -a'_1(t) \cdot e - a'_2(t) \cdot f$$

Substituindo em (24), obtemos que:

$$-a'_1(t) \cdot e - a'_2(t) \cdot f + \lambda(t) \cdot a'_1(t) \cdot E + \lambda(t) \cdot a'_2(t) \cdot F = 0$$

ou seja,

$$a'_1(t) \cdot e + a'_2(t) \cdot f - \lambda(t) \cdot a'_1(t) \cdot E - \lambda(t) \cdot a'_2(t) \cdot F = 0$$

logo:

$$(e - \lambda(t) \cdot E) \cdot a'_1(t) + (f - \lambda(t) \cdot F) \cdot a'_2(t) = 0$$

Agora, tomando o produto interno dos dois membros da equação (22) por $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t))$, obtemos:

$$\left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)) + \lambda(t) \cdot \alpha'(t), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \lambda(t) \cdot \left\langle \alpha'(t), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\ & + \lambda(t) \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_1(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_2(t), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\ & + \lambda(t) \cdot a'_1(t) \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \lambda(t) \cdot a'_2(t) \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = \\ & = \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \lambda(t) \cdot a'_1(t) \cdot F + \lambda(t) \cdot a'_2(t) \cdot G \quad (24) \end{aligned}$$

Observe agora que, como para todo $t \in I$, tem-se:

$$\left\langle N(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0$$

então:

$$\frac{d}{dt} \left\langle N(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\
& + \left\langle N(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_1(t) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_2(t) \right\rangle = \\
& = \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + \\
& + a'_1(t) \cdot \left\langle N(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + a'_2(t) \cdot \left\langle N(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = \\
& = \left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle + a'_1(t) \cdot f + a'_2(t) \cdot g
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\langle \frac{dN}{dt}(a_1(t), a_2(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \right\rangle = -a'_1(t) \cdot f - a'_2(t) \cdot g$$

Substituindo em (24), obtemos que:

$$-a'_1(t) \cdot f - a'_2(t) \cdot g + \lambda(t) \cdot a'_1(t) \cdot F + \lambda(t) \cdot a'_2(t) \cdot G = 0$$

ou seja,

$$a'_1(t) \cdot f + a'_2(t) \cdot g - \lambda(t) \cdot a'_1(t) \cdot F - \lambda(t) \cdot a'_2(t) \cdot G = 0$$

logo:

$$(f - \lambda(t) \cdot F) \cdot a'_1(t) + (g - \lambda(t) \cdot G) \cdot a'_2(t) = 0$$

Assim, valem:

$$\begin{cases} (e - \lambda(t) \cdot E) \cdot a'_1(t) + (f - \lambda(t) \cdot F) \cdot a'_2(t) = 0 \\ (f - \lambda(t) \cdot F) \cdot a'_1(t) + (g - \lambda(t) \cdot G) \cdot a'_2(t) = 0 \end{cases}$$

Segue da **Proposição 70** que $\alpha'(t) = a'_1(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) + a'_2(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t))$ é uma direção principal de S em $\varphi(a_1(t), a_2(t))$, cuja curvatura principal é $\lambda(t)$, ou seja, $\lambda(t) = \kappa_n(\alpha'(t))$. Assim, $\alpha : I \rightarrow S$ é uma linha de curvatura.

Proposição 87 *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples. Se $(u_0, v_0) \in U$ é tal que $\varphi(u_0, v_0) = q \in S$ é um ponto não-umbílico de S , então existe uma vizinhança, V , de (u_0, v_0) , $V \subset U$, de pontos não-umbílicos tal que para todo $q \in V$ existem duas linhas de curvatura, $\alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t)), t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ e $\beta(t) = \varphi(b_1(t), b_2(t)), t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tais que $(a_1(0), a_2(0)) = (b_1(0), b_2(0)) = q$.*

Como (u_0, v_0) não é tal que $\varphi(u_0, v_0)$ é ponto umbílico de S , segue-se que:

$$\begin{aligned} H^2(\varphi(u_0, v_0)) - \kappa(\varphi(u_0, v_0)) &= \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right)^2 - k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{4} \cdot (k_1^2 + 2 \cdot k_1 \cdot k_2 + k_2^2) - k_1 \cdot k_2 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (k_1^2 - 2 \cdot k_1 \cdot k_2 + k_2^2) = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

Como a função $(H^2 - \kappa) \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, pelo **Teorema da Conservação do Sinal**, existe uma vizinhança $V \ni (u_0, v_0)$ tal que $(\forall (u, v) \in V)(H^2(\varphi(u, v)) - \kappa(\varphi(u, v)) > 0)$, ou seja, V contém apenas pontos não-umbílicos.

Fixado $q = \varphi(u_0, v_0)$, queremos verificar a existência de exatamente duas curvas em S , $\alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t)), t \in I$ e $\beta(t) = \varphi(b_1(t), b_2(t)), t \in I$ tais que:

$$\begin{vmatrix} (a'_2(t))^2 & -a'_1(t) \cdot a'_2(t) & (a'_1(t))^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} (b'_2(t))^2 & -b'_1(t) \cdot b'_2(t) & (b'_1(t))^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

com $(a_1(0), a_2(0)) = (u_0, v_0) = (b_1(0), b_2(0))$. Considerando essa condição como uma equação quadrática na variável $a'_2(t)$, temos:

$$\underbrace{(F \cdot g - G \cdot f)}_{=a} \cdot a'_2(t)^2 + \underbrace{(E \cdot g - G \cdot e) \cdot a'_1(t)}_{=b} \cdot a'_2(t) + \underbrace{(E \cdot f - F \cdot e) \cdot a'_1(t)^2}_{=c} = 0$$

$$\Delta = (E \cdot g - G \cdot e)^2 - 4 \cdot (F \cdot g - G \cdot f) \cdot (E \cdot f - F \cdot e) \cdot a'_1(t)^2$$

Mas:

$$b^2 = (E \cdot g - G \cdot e)^2 \cdot [a'_1(t)]^2$$

e:

$$\begin{aligned} 4 \cdot a \cdot c &= 4 \cdot (F \cdot g - G \cdot f) \cdot (E \cdot f - F \cdot e) \cdot a'_1(t)^2 = \\ &= 4 \cdot (E \cdot F \cdot f \cdot g - F^2 \cdot e \cdot g - E \cdot G \cdot f^2 + G \cdot F \cdot e \cdot f) \cdot [a'_1(t)]^2 \end{aligned}$$

Assim, o discriminante da equação quadrática é:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = \\ &= [a'_1(t)]^2 \cdot \left((E \cdot g - G \cdot e)^2 - 4 \cdot (E \cdot F \cdot f \cdot g - F^2 \cdot e \cdot g - E \cdot G \cdot f^2 + F \cdot G \cdot e \cdot f) \right) = \\ &= [a'_1(t)]^2 \cdot \left((E \cdot g - G \cdot e)^2 - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g + 4 \cdot F^2 \cdot e \cdot g + 4 \cdot E \cdot G \cdot f^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f \right) \quad (25) \end{aligned}$$

Note que:

$$H^2 = \left(\frac{e \cdot G - 2 \cdot F \cdot f + E \cdot g}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} \right)^2 =$$

$$= \frac{e^2 \cdot G^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f + 2 \cdot E \cdot G \cdot e \cdot g - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g + 4 \cdot F^2 \cdot f^2 + E^2 \cdot g^2}{4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2}$$

$$H^2 - \kappa =$$

$$= \frac{e^2 \cdot G^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f + 2 \cdot E \cdot G \cdot e \cdot g - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g + 4 \cdot F^2 \cdot f^2 + E^2 \cdot g^2}{4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2} - \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2} =$$

$$= \frac{e^2 \cdot G^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f + 2 \cdot E \cdot G \cdot e \cdot g - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g + 4 \cdot F^2 \cdot f^2 + E^2 \cdot g^2}{4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2} -$$

$$- \frac{4 \cdot (E \cdot G - F^2) \cdot (e \cdot g - f^2)}{4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2} =$$

$$= \frac{e^2 \cdot G^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f + 2 \cdot E \cdot G \cdot e \cdot g - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g + \cancel{4 \cdot F^2 \cdot f^2} + E^2 \cdot g^2}{4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2} -$$

$$- \frac{4 \cdot E \cdot G \cdot e \cdot g - 4 \cdot E \cdot G \cdot f^2 - 4 \cdot F^2 \cdot e \cdot g + \cancel{4 \cdot F^2 \cdot f^2}}{4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2} =$$

$$= \frac{e^2 \cdot G^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g - 2 \cdot E \cdot G \cdot e \cdot g + E^2 \cdot g^2 + 4 \cdot E \cdot G \cdot f^2 + 4 \cdot F^2 \cdot e \cdot g}{4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2} =$$

$$= \frac{(e \cdot G - E \cdot g)^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g + 4 \cdot E \cdot G \cdot f^2 + 4 \cdot F^2 \cdot e \cdot g}{4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2}$$

$$4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2 \cdot (H^2 - \kappa) =$$

$$= (e \cdot G - E \cdot g)^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g + 4 \cdot E \cdot G \cdot f^2 + 4 \cdot F^2 \cdot e \cdot g$$

donde:

$$[a'_1(t)]^2 \cdot \left(4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2 \cdot (H^2 - \kappa) \right) =$$

$$= [a'_1(t)]^2 \cdot \left((e \cdot G - E \cdot g)^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g + 4 \cdot E \cdot G \cdot f^2 + 4 \cdot F^2 \cdot e \cdot g \right) \quad (26)$$

Assim, comparando (25) e (26), obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = \\
&= [a'_1(t)]^2 \cdot \left((E \cdot g - G \cdot e)^2 - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g + 4 \cdot F^2 \cdot e \cdot g + 4 \cdot E \cdot G \cdot f^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f \right) = \\
&= [a'_1(t)]^2 \cdot \left((e \cdot G - E \cdot g)^2 - 4 \cdot F \cdot G \cdot e \cdot f - 4 \cdot E \cdot F \cdot f \cdot g + 4 \cdot E \cdot G \cdot f^2 + 4 \cdot F^2 \cdot e \cdot g \right) = \\
&= [a'_1(t)]^2 \cdot \left(4 \cdot (E \cdot G - F^2)^2 \cdot (H^2 - \kappa) \right)
\end{aligned}$$

Sabemos, por (5), que $E \cdot F - G^2 > 0$, e como o ponto não é umbílico, $H^2 - \kappa > 0$, e portanto:

$$\Delta = [a'_1(t)]^2 \cdot \left(4 \cdot \underbrace{(E \cdot G - F^2)^2}_{>0} \cdot \overbrace{(H^2 - \kappa)}^{>0} \right) > 0$$

de modo que a equação quadrática:

$$(F \cdot g - G \cdot f) \cdot a'_2(t)^2 + (E \cdot g - G \cdot e) \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + (E \cdot f - F \cdot e) \cdot a'_1(t)^2 = 0$$

pode ser fatorada como:

$$(A \cdot a'_1(t) + B \cdot a'_2(t)) \cdot (C \cdot a'_1(t) + D \cdot a'_2(t)) = 0$$

que é portanto equivalente ao sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} A \cdot a'_1(t) + B \cdot a'_2(t) = 0 \\ C \cdot a'_1(t) + D \cdot a'_2(t) = 0 \\ a_1(0) = u_0 \\ a_2(0) = v_0 \end{cases}$$

que pelo **Teorema de Existência e Unicidade** admite solução única para a_1 e a_2 . Assim, a curva:

$$\begin{aligned}
\alpha :] - \varepsilon, \varepsilon[&\rightarrow S \\
t &\mapsto \varphi(a_1(t), a_2(t))
\end{aligned}$$

por satisfazer a EDO dada na **Proposição 83**, é uma linha de curvatura de S por $\varphi(u_0, v_0)$. Analogamente, prova-se que existe uma linha de curvatura, $\beta(t) = \varphi(b_1(t), b_2(t)), t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$.

Observamos, assim, que se $(u_0, v_0) \in U$ é tal que $\varphi(u_0, v_0)$ é ponto umbílico de uma superfície S , então não podemos afirmar nada a respeito da existência das linhas de curvatura passando por $\varphi(u_0, v_0)$. Por exemplo, no parabolóide elíptico parametrizado por:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u, v, u^2 + v^2)\end{aligned}$$

o ponto $(0, 0)$ é tal que $(0, 0, 0)$ é umbílico, e existem infinitas linhas de curvatura passando por $(0, 0, 0)$.

Definição 88 (direção assintótica) *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada e $(u_0, v_0) \in U$. Uma direção tangente a S em $\varphi(u_0, v_0)$ para a qual a curvatura normal se anula é chamada de **direção assintótica** de S em $\varphi(u_0, v_0)$.*

Podemos determinar a quantidade de direções assintóticas em um ponto em termos da curvatura gaussiana nele.

Proposição 89 *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada e $\varphi(u_0, v_0) \in S$ um ponto de S .*

- (a) *Se $(u_0, v_0) \in U$ é tal que $\varphi(u_0, v_0)$ é elíptico, então não existem direções assintóticas em $\varphi(u_0, v_0)$;*
- (b) *Se $(u_0, v_0) \in U$ é tal que $\varphi(u_0, v_0)$ é hiperbólico, então existem exatamente duas direções assintóticas em $\varphi(u_0, v_0)$;*
- (c) *Se $(u_0, v_0) \in U$ é tal que $\varphi(u_0, v_0)$ é parabólico, então existe uma única direção assintótica em $\varphi(u_0, v_0)$;*
- (d) *Se $(u_0, v_0) \in U$ é tal que $\varphi(u_0, v_0)$ é planar, então toda direção é assintótica em $\varphi(u_0, v_0)$;*

Todos os casos decorrem da **Fórmula de Euler** para a curvatura normal (**Proposição 68**):

$$\kappa_n(\vec{w}) = k_1 \cdot \cos^2(\theta) + k_2 \cdot \sin^2(\theta)$$

em que k_1, k_2 são as curvaturas principais em $\varphi(u_0, v_0)$, $\vec{w} = \cos(\theta) \cdot \vec{w}_1 + \sin(\theta) \cdot \vec{w}_2$ é um vetor unitário tangente em $\varphi(u_0, v_0)$ e $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ são os vetores principais. As direções assintóticas são determinadas pelos valores de θ que anulam a expressão acima para $\kappa_n(\vec{w})$:

- Ad (a): Se $\kappa(\varphi(u_0, v_0)) > 0$, então k_1 e k_2 têm o mesmo sinal, portanto $\kappa_n(\vec{w}) \neq 0$ para qualquer $\vec{w} \neq \vec{0}$.
- Ad (b): Se $\kappa(\varphi(u_0, v_0)) < 0$, então k_1 e k_2 têm sinais opostos, ou seja, $k_1 < 0$ e $k_2 > 0$. Assim:

$$k_1 \cdot \sin^2(\theta) + k_2 \cdot \cos^2(\theta) = k_1 \cdot (1 - \cos^2(\theta)) + k_2 \cdot \cos^2(\theta) = k_1 + (k_2 - k_1) \cdot \cos^2(\theta) = 0$$

$$(k_2 - k_1) \cdot \cos^2(\theta) = -k_1 > 0$$

$$\cos^2(\theta) = -\frac{k_1}{k_2 - k_1}$$

$$\cos(\theta) = \pm \sqrt{\frac{-k_1}{k_2 - k_1}}$$

Assim, as direções dadas por:

$$\theta_1 = \arccos \left(\sqrt{\frac{-k_1}{k_2 - k_1}} \right)$$

$$\theta_2 = \arccos \left(-\sqrt{\frac{-k_1}{k_2 - k_1}} \right)$$

são as direções assintóticas de S em $\varphi(u_0, v_0)$.

- Ad (c): Se $\varphi(u_0, v_0)$ é parabólico, podemos supor que $k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$. Resolvendo, então, a equação:

$$k_2 \cdot \sin^2(\theta) = 0$$

obteremos a única direção assintótica determinada pelo vetor principal $\vec{w}_1$.

- Ad (d): se $\varphi(u_0, v_0)$ é planar, então $k_1 = k_2 = 0$, e a equação vale para todo θ .

Definição 90 (linha assintótica) Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow S$, $\alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t))$ é uma **linha assintótica** se, e somente se, para todo $t \in I$, $\alpha'(t)$ é uma direção assintótica de S em $\varphi(a_1(t), a_2(t))$.

Exemplo 91 Toda curva regular em um plano é uma linha assintótica.

Exemplo 92 Seja $(S, \varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada qualquer. Se $\alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t))$ for uma reta, então α é uma linha assintótica.

O teorema a seguir nos fornece uma equação diferencial ordinária que nos permite calcular as curvas assintóticas de uma superfície.

Proposição 93 *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada. Então uma curva regular $\alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t))$, $t \in I$ é linha assintótica de S se, e somente se, as funções $a_1, a_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfizerem:*

$$e \cdot (a'_1(t))^2 + 2 \cdot f \cdot [a'_1(t)] \cdot [a'_2(t)] + g \cdot [a'_2(t)]^2 = 0 \quad (27)$$

em que e, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental de S em $(a_1(t), a_2(t))$.

Por definição de linha assintótica, α é tal que $(\forall t \in I)(\kappa_n(\alpha'(t)) = 0)$, ou seja, se para qualquer $t \in I$:

$$\kappa_n(\alpha'(t)) = \frac{e \cdot [a'_1(t)]^2 + 2 \cdot f \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + g \cdot [a'_2(t)]^2}{E \cdot [a'_1(t)]^2 + 2 \cdot F \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + G \cdot [a'_2(t)]^2} = 0$$

o que ocorre se, e somente se:

$$(\forall t \in I)(e \cdot (a'_1(t))^2 + 2 \cdot f \cdot [a'_1(t)] \cdot [a'_2(t)] + g \cdot [a'_2(t)]^2 = 0)$$

10 Curvas Geodésicas

A seguir vamos introduzir a noção de curva geodésica de uma superfície. As curvas geodésicas são as curvas mais importantes das superfícies.

Definição 94 (geodésica) *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular simples. Uma curva regular, $\alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t))$, $t \in I$ é uma **geodésica** da superfície S se para todo $t \in I$, $\alpha''(t)$ é um vetor normal a S em $\varphi(a_1(t), a_2(t))$*

Observação 95 *Se $\alpha : I \rightarrow S$ é uma geodésica da superfície S , então $\|\alpha'(t)\|$ é constante. De fato, como para todo $t \in I$ vale $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$, concluímos que:*

$$\frac{d}{dt} \|\alpha'(t)\|^2 = 2 \cdot \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$$

Se $\alpha(s) = \varphi(a_1(s), a_2(s))$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura não se anula, então podemos obter uma condição necessária para que α seja uma geodésica, envolvendo o triedro de Frenet. De fato, se $\alpha : J \rightarrow S$ parametriza uma geodésica por comprimento de arco, então $\alpha''(s)$ é, portanto, o vetor normal, $\vec{N}_\alpha(s)$ é normal à superfície. Daí temos que:

$$\vec{N}_\alpha(s) = \pm \vec{N}(\varphi(a_1(s), a_2(s)))$$

Segue das fórmulas de Frenet que:

$$\pm \frac{d}{ds} \vec{N}(\varphi(a_1(s), a_2(s))) = \frac{d\vec{N}_\alpha}{ds}(s) = -\kappa(s) \cdot \vec{T}_\alpha(s) - \tau(s) \cdot \vec{B}_\alpha(s) \quad (28)$$

em que $\vec{T}_\alpha(s)$ e $\vec{B}_\alpha(s)$ indicam, respectivamente, o vetor tangente e o vetor binormal de α em s .

Exemplo 96 Toda reta contida em uma superfície é uma geodésica.

Exemplo 97 Consideremos uma esfera de raio $r > 0$. Veremos que todo círculo máximo parametrizado por comprimento de arco, é uma geodésica da esfera, e reciprocamente, toda geodésica da esfera tem o traço contido em um círculo máximo. De fato, todo círculo máximo, parametrizado por comprimento de arco, tem o vetor α'' apontando para o centro da esfera, e portanto normal à esfera.

Reciprocamente, se α é uma geodésica da esfera, podemos supor $\alpha : J \rightarrow S^2$ parametrizada por comprimento de arco. Da relação (28), temos que:

$$\pm \frac{d}{ds} \vec{N}(\varphi(a_1(t), a_2(t))) = -\kappa(s) \cdot \vec{T}_\alpha(s) - \tau(s) \cdot \vec{B}_\alpha(s)$$

Por outro lado, toda curva da esfera é uma linha de curvatura e $\kappa_n(\alpha'(t)) = \pm \frac{1}{r}$. Segue-se da **Fórmula de Olinde Rodrigues** que:

$$\frac{d}{ds} \vec{N}(\varphi(a_1(s), a_2(s))) \pm \frac{1}{r} \cdot \vec{T}_\alpha(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{N}(\varphi(a_1(s), a_2(s))) = \pm \frac{1}{r} \cdot \vec{T}_\alpha(s)$$

Logo, para todo $s \in J$:

$$\frac{1}{r} \cdot \vec{T}_\alpha(s) = -\kappa(s) \cdot \vec{T}_\alpha(s) - \tau(s) \cdot \vec{B}_\alpha(s)$$

$$\left(\pm \frac{1}{r} - \kappa(s) \right) \cdot \vec{T}_\alpha(s) + \tau(s) \cdot \vec{B}_\alpha(s) = \vec{0}$$

Como $\{\vec{T}_\alpha(s), \vec{B}_\alpha(s)\}$ é linearmente independente, segue em particular que $(\forall s \in J)(\tau(s) = 0)$, e portanto α é uma curva plana de curvatura constante $\pm \frac{1}{r}$, ou seja, um círculo máximo.

A seguir, vamos obter as equações diferenciais que permitem obter as geodésicas de uma superfície. Consideremos uma superfície regular parametrizada, $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$. Como para cada $(u, v) \in U$, os vetores:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \text{ e } \vec{N}(u, v)$$

são linearmente independentes, segue que os vetores $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v), \frac{\partial N}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial N}{\partial v}(u, v)$ podem ser expressos como combinações lineares de $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ e $N(u, v)$. Isto é:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v) = \Gamma_{11}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{11}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + a_{11} \cdot N(u, v) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v) = \Gamma_{12}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{12}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + a_{12} \cdot N(u, v) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v) = \Gamma_{22}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{22}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + a_{22} \cdot N(u, v) \\ \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) = b_{11} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + b_{12} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) = b_{21} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + b_{22} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \end{cases} \quad (29)$$

em que Γ_{ij}^k, a_{ij} e b_{ij} devem ser determinados. Nas duas últimas igualdades usamos o fato de que $\frac{\partial N}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial N}{\partial v}(u, v)$ são vetores tangentes à superfície.

Os coeficientes Γ_{ij}^k são os **símbolos de Christoffel** da superfície S .

Tomando o produto interno dos dois membros de cada uma das três primeiras equações de (29) por $N(u, v)$, concluímos que:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, N(u, v) \right\rangle = e \\ a_{12} &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, N(u, v) \right\rangle = f \\ a_{22} &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, N(u, v) \right\rangle = g \end{aligned}$$

Vamos agora obter expressões que nos forneçam Γ_{ij}^k .

Observe que como para todo $(u, v) \in U$ temos:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), N(u, v) \right\rangle = 0, \quad (30)$$

ao derivar os dois membros de (30) com respeito a u , obtemos:

$$\overbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), N(u, v) \right\rangle}^{=e} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) \right\rangle = 0$$

e concluimos que:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) \right\rangle = -e$$

Também, derivando (30) com respeito a v , obtemos:

$$\overbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), N(u, v) \right\rangle}^{=f} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) \right\rangle = 0$$

e concluimos que:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) \right\rangle = -f$$

Também, como para todo $(u, v) \in U$ tem-se:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), N(u, v) \right\rangle = 0, \tag{31}$$

ao derivar os dois membros de (31) com respeito a u , obtemos:

$$\overbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}(u, v), N(u, v) \right\rangle}^{=f} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) \right\rangle = 0$$

e concluimos que:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) \right\rangle = -f$$

Também, derivando (31) com respeito a v , obtemos:

$$\overbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v), N(u, v) \right\rangle}^{=g} + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) \right\rangle = 0$$

e concluimos que:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) \right\rangle = -g$$

Tomando o produto interno da primeira equação em (29) por $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = \Gamma_{11}^1 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle + \Gamma_{11}^2 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle + a_{11} \cdot \left\langle N(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle$$

que é equivalente a:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = \Gamma_{11}^1 \cdot E(u, v) + \Gamma_{11}^2 \cdot F(u, v) + a_{11} \cdot 0 \quad (32)$$

Observe bem que:

$$\frac{\partial E}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = 2 \cdot \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle$$

ou seja, que:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial u}(u, v)$$

de modo que podemos reescrever (32) como:

$$\Gamma_{11}^1 \cdot E(u, v) + \Gamma_{11}^2 \cdot F(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial u}(u, v)$$

Agora, tomando o produto interno dos dois membros da primeira equação de (29) por $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$, obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \Gamma_{11}^1 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle + \Gamma_{11}^2 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle + a_{11} \cdot \left\langle N(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

que é equivalente a:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \Gamma_{11}^1 \cdot F(u, v) + \Gamma_{11}^2 \cdot G(u, v) + a_{11} \cdot 0 \quad (33)$$

Observe bem que:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v) \right\rangle$$

e que:

$$\frac{\partial E}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = 2 \cdot \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle$$

de modo que:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

Substituindo a expressão acima em (33), obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) = \Gamma_{11}^1 \cdot F(u, v) + \Gamma_{11}^2 \cdot G(u, v)$$

Assim, chegamos ao sistema linear nas variáveis Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 :

$$\begin{cases} E(u, v) \cdot \Gamma_{11}^1 + F(u, v) \cdot \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial u}(u, v) \\ F(u, v) \cdot \Gamma_{11}^1 + G(u, v) \cdot \Gamma_{11}^2 = \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

cujas soluções podem ser encontradas pela **Regra de Cramer**:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial u}(u, v) & F(u, v) \\ \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial u}(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) \right)}{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\begin{vmatrix} E(u, v) & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial u}(u, v) \\ F(u, v) & \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{E(u, v) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial u}(u, v) \cdot F(u, v)}{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$$

Agora vamos obter expressões para Γ_{12}^1 e Γ_{12}^2 .

Note primeiramente que:

$$\frac{\partial E}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = 2 \cdot \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle$$

ou seja, que:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v)$$

Tomando o produto interno dos dois membros da segunda equação de (29) por $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle &= \Gamma_{12}^1 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle + \Gamma_{12}^2 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = \\ &\quad \Gamma_{12}^1 \cdot E(u, v) + \Gamma_{12}^2 \cdot F(u, v) \end{aligned}$$

e substituindo a expressão obtida, tem-se:

$$\Gamma_{12}^1 \cdot E(u, v) + \Gamma_{12}^2 \cdot F(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v)$$

Também, observando que para todo $(u, v) \in U$ temos:

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = 2 \cdot \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

ou seja, que:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

ao tomarmos o produto interno dos dois membros da segunda equação de (29) por $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle &= \\ &= \Gamma_{12}^1 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle + \Gamma_{12}^2 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle + a_{12} \cdot \left\langle N(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \\ &\quad = F(u, v) \cdot \Gamma_{12}^1 + G(u, v) \cdot \Gamma_{12}^2 \end{aligned}$$

Assim, obtemos a equação:

$$F(u, v) \cdot \Gamma_{12}^1 + G(u, v) \cdot \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v)$$

Obtemos, assim, o sistema linear nas variáveis Γ_{12}^1 e Γ_{12}^2 :

$$\begin{cases} E(u, v) \cdot \Gamma_{12}^1 + F(u, v) \cdot \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) \\ F(u, v) \cdot \Gamma_{12}^1 + G(u, v) \cdot \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \end{cases}$$

cujas soluções podem ser encontradas pela **Regra de Cramer**:

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) & F(u, v) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v)}{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\begin{vmatrix} E(u, v) & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) \\ F(u, v) & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot E(u, v) \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot F(u, v) \cdot \frac{\partial E}{\partial v}(u, v)}{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$$

No que segue, vamos buscar expressões que nos forneçam Γ_{22}^1 e Γ_{22}^2 .

Observe primeiramente que:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v) \right\rangle$$

de modo que:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v) \right\rangle$$

Tomando o produto interno dos dois membros da terceira equação de (29) por $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle &= \Gamma_{22}^1 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle + \Gamma_{22}^2 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = \\ &= E(u, v) \cdot \Gamma_{22}^1 + F(u, v) \cdot \Gamma_{22}^2 \end{aligned}$$

ou seja:

$$E(u, v) \cdot \Gamma_{22}^1 + F(u, v) \cdot \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v)$$

Também, observe que:

$$\frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = 2 \cdot \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

ou seja:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

Tomando o produto interno dos dois membros da terceira equação de (29) por $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$, obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \Gamma_{22}^1 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle + \Gamma_{22}^2 \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle =$$

$$F(u, v) \cdot \Gamma_{22}^1 + G(u, v) \cdot \Gamma_{22}^2$$

ou seja:

$$F(u, v) \cdot \Gamma_{22}^1 + G(u, v) \cdot \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial v}(u, v)$$

Assim, obtivemos o seguinte sistema linear nas incógnitas Γ_{22}^1 e Γ_{22}^2 :

$$\begin{cases} E(u, v) \cdot \Gamma_{22}^1 + F(u, v) \cdot \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \\ F(u, v) \cdot \Gamma_{22}^1 + G(u, v) \cdot \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

cujas soluções podem ser encontradas pela **Regra de Cramer**:

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) & F(u, v) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \right) \cdot G(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) \cdot F(u, v)}{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\begin{vmatrix} E(u, v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \\ F(u, v) & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot E(u, v) \cdot \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) - F(u, v) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \right)}{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$$

A esta altura convém interromper os nossos cálculos a fim de chamar a atenção para o fato de os símbolos de Christoffel dependerem exclusivamente da primeira forma fundamental. Segue, portanto, da nossa definição de superfícies isométricas que elas têm os mesmos símbolos de Christoffel. Mais a frente veremos que isto prova a essência do **Teorema Egrégio de Gauss**.

Finalmente, tomando o produto interno dos dois membros da quarta equação de (29) por $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$, obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = b_{11} \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle + b_{12} \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = -e = b_{11} \cdot E(u, v) + b_{12} \cdot F(u, v)$$

e tomando o produto interno dos dois membros da quarta equação de (29) por $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$, obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = b_{11} \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle + b_{12} \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = -f = b_{11} \cdot F(u, v) + b_{12} \cdot G(u, v)$$

Obtemos, assim, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} b_{11} \cdot E(u, v) + b_{12} \cdot F(u, v) = -e \\ b_{11} \cdot F(u, v) + b_{12} \cdot G(u, v) = -f \end{cases}$$

cujas resoluções pela regra de Cramer nos fornece:

$$b_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -e & F(u, v) \\ -f & G(u, v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{f \cdot F(u, v) - e \cdot G(u, v)}{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$$

e:

$$b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} E(u, v) & -e \\ F(u, v) & -f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{e \cdot F(u, v) - f \cdot E(u, v)}{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$$

Tomando o produto interno dos dois membros da quinta equação de (29) por $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$, obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = -f = b_{21} \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle + b_{22} \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \right\rangle = \\ = b_{21} \cdot E(u, v) + b_{22} \cdot F(u, v)$$

e tomando o produto interno dos dois membros da quinta equação de (29) por $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$, obtemos:

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = -g = b_{21} \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle + b_{22} \cdot \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\rangle = \\ = b_{21} \cdot F(u, v) + b_{22} \cdot G(u, v)$$

Obtemos, assim, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} b_{21} \cdot E(u, v) + b_{22} \cdot F(u, v) = -f \\ b_{21} \cdot F(u, v) + b_{22} \cdot G(u, v) = -g \end{cases}$$

cuja resolução pela regra de Cramer nos fornece:

$$b_{21} = \frac{\begin{vmatrix} -f & F(u, v) \\ -g & G(u, v) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{g \cdot F(u, v) - f \cdot G(u, v)}{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$$

e:

$$b_{22} = \frac{\begin{vmatrix} E(u, v) & -f \\ F(u, v) & -g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{f \cdot F(u, v) - g \cdot E(u, v)}{E(u, v) \cdot G(u, v) - F(u, v)^2}$$

Agora apresentaremos um sistema de EDOs que nos permite encontrar geodésicas em uma superfície regular:

Proposição 98 Sejam $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples e:

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow S \\ t &\mapsto \varphi(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

uma curva regular. Então $\alpha : I \rightarrow S$ é uma **geodésica** se, e somente se, as funções $a_1, a_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem o seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} [a_1''(t)] + [a_1'(t)]^2 \cdot \Gamma_{11}^1 + 2 \cdot a_1'(t) \cdot a_2'(t) \cdot \Gamma_{12}^1 + [a_2'(t)]^2 \cdot \Gamma_{22}^1 = 0 \\ [a_2''(t)] + [a_1'(t)]^2 \cdot \Gamma_{11}^2 + 2 \cdot a_1'(t) \cdot a_2'(t) \cdot \Gamma_{12}^2 + [a_2'(t)]^2 \cdot \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases} \quad (34)$$

em que Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da superfície.

Por definição, $\alpha : I \rightarrow S$ é uma geodésica de S se, e somente se, para todo $t \in I$, $\alpha''(t)$ não tem componente tangencial à superfície. Vamos obter $\alpha''(t)$ como combinação linear de $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ e $N(u, v)$ e, em seguida, exigindo que os coeficientes de $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ sejam nulos, obteremos o sistema de equações (34). De fato, pela regra da cadeia, temos:

$$\alpha'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_1'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_2'(t)$$

e derivando novamente com respeito a t , obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_1'(t) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_2'(t) \right) \cdot a_1'(t) + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_1''(t) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_1'(t) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_2'(t) \right) \cdot a_2'(t) + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_2''(t) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(a_1(t), a_2(t)) \cdot [a_1'(t)]^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a_1'(t) \cdot a_2'(t) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(a_1(t), a_2(t)) \cdot [a_2'(t)]^2 + \\ &+ a_1''(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) + a_2''(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas parciais de ordem 2 pelas expressões dadas em (29), obtemos:

$$\begin{aligned}
\alpha''(t) &= \\
&= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(a_1(t), a_2(t)) \cdot [a'_1(t)]^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(a_1(t), a_2(t)) \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(a_1(t), a_2(t)) \cdot [a'_2(t)]^2 + \\
&\quad + a''_1(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) + a''_2(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) = \\
&= \left(\Gamma_{11}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{11}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + e \cdot N(u, v) \right) \cdot [a'_1(t)]^2 \\
&\quad + 2 \cdot \left(\Gamma_{12}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{12}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + f \cdot N(u, v) \right) \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + \\
&\quad + \left(\Gamma_{22}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{22}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + g \cdot N(u, v) \right) \cdot [a'_2(t)]^2 + \\
&\quad + a''_1(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) + a''_2(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) = \\
&= \left(a''_1(t) + \Gamma_{11}^1 \cdot [a'_1(t)]^2 + 2 \cdot \Gamma_{12}^1 \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + \Gamma_{22}^1 \cdot [a'_2(t)]^2 \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) + \\
&\quad + \left(a''_2(t) + \Gamma_{11}^2 \cdot [a'_1(t)]^2 + 2 \cdot \Gamma_{12}^2 \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + \Gamma_{22}^2 \cdot [a'_2(t)]^2 \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) + \\
&\quad + \left(e \cdot [a'_1(t)]^2 + f \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + g \cdot [a'_2(t)]^2 \right) \cdot N(u)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha''(t) &= \left(a''_1(t) + \Gamma_{11}^1 \cdot [a'_1(t)]^2 + 2 \cdot \Gamma_{12}^1 \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + \Gamma_{22}^1 \cdot [a'_2(t)]^2 \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a_1(t), a_2(t)) + \\
&\quad + \left(a''_2(t) + \Gamma_{11}^2 \cdot [a'_1(t)]^2 + 2 \cdot \Gamma_{12}^2 \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + \Gamma_{22}^2 \cdot [a'_2(t)]^2 \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a_1(t), a_2(t)) + \\
&\quad + \left(e \cdot [a'_1(t)]^2 + f \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + g \cdot [a'_2(t)]^2 \right) \cdot N(u)
\end{aligned}$$

Assim, $\alpha : I \rightarrow S$ é uma geodésica se, e somente se, as componentes tangenciais de $\alpha''(t)$ forem nulas para todo $t \in I$, ou seja, se, e somente se:

$$\begin{cases} a''_1(t) + \Gamma_{11}^1 \cdot [a'_1(t)]^2 + 2 \cdot \Gamma_{12}^1 \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + \Gamma_{22}^1 \cdot [a'_2(t)]^2 = 0 \\ a''_2(t) + \Gamma_{11}^2 \cdot [a'_1(t)]^2 + 2 \cdot \Gamma_{12}^2 \cdot a'_1(t) \cdot a'_2(t) + \Gamma_{22}^2 \cdot [a'_2(t)]^2 = 0 \end{cases}$$

Uma vez que, pelo que vimos acima, as geodésicas são determinadas em termos de EDOs que envolvem apenas os símbolos de Christoffel da superfície, que as geodésicas de uma superfície são invariantes sob isometrias.

O teorema de existência para geodésicas afirma que, por cada ponto da superfície, passa uma geodésica tangente a qualquer vetor dado. Mais precisamente,

Proposição 99 *Seja $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ uma superfície regular parametrizada simples. Para qualquer $q_0 = (u_0, v_0) \in U$ e para qualquer vetor não-nulo, $w \in T_{\varphi(q)}S$ existem $\varepsilon > 0$ e uma única geodésica:*

$$\begin{aligned} \alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[&\rightarrow S \\ t &\mapsto \varphi(a_1(t), a_2(t)) \end{aligned}$$

tal que $(a_1(0), a_2(0)) = q_0$ e $\alpha'(0) = w$.

Considere $w = a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + b \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$. Pelo **Teorema de Existência e Unicidade** de soluções de EDOs, existem $\varepsilon > 0$ e funções $a_1, a_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (34) sob as condições iniciais $a_1(0) = u_0$, $a_2(0) = v_0$, $a_1'(0) = a$ e $a_2'(0) = b$. Além disso, tais funções são únicas. Segue-se da proposição anterior que a curva $\alpha(t) = \varphi(a_1(t), a_2(t))$ é uma geodésica de S tal que $(a_1(0), a_2(0)) = (u_0, v_0) = q_0$ e $\alpha'(0) = w$.

11 O Teorema Egrégio de Gauss

Nesta seção veremos um dos mais importantes teoremas da teoria das superfícies, que asserciona que a curvatura gaussiana, definida como:

$$\kappa = \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2}$$

depende, na verdade, apenas da primeira forma fundamental.

Inicialmente, lembramos que se $(S, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3)$ é uma superfície regular parametrizada simples e $\vec{N} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a respectiva aplicação normal de Gauss, então, como vimos na seção anterior, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v)$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v)$ e $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v)$ são combinações lineares de $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ e $N(u, v)$. Além disso, $\frac{\partial N}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial N}{\partial v}(u, v)$, por serem tangentes à superfície, são combinações lineares de $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ (cf. (29)). Os coeficientes:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{G \cdot E_u - 2 \cdot F \cdot F_u + F \cdot E_v}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{2 \cdot E \cdot F_u - E \cdot E_v - F \cdot E_u}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{G \cdot E_v - F \cdot G_u}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 = \frac{E \cdot G_u - F \cdot E_v}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{2 \cdot G \cdot F_v - G \cdot G_u - F \cdot G_v}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{E \cdot G_v - 2 \cdot F \cdot F_v + F \cdot G_u}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} \end{cases} \quad (35)$$

e:

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{f \cdot F - e \cdot G}{E \cdot G - F^2}, & b_{12} = \frac{e \cdot F - f \cdot E}{E \cdot G - F^2}, \\ b_{21} = \frac{g \cdot F - f \cdot G}{E \cdot G - F^2}, & b_{22} = \frac{f \cdot F - g \cdot E}{E \cdot G - F^2} \end{cases} \quad (36)$$

não são independentes, pois pelo **Teorema de Schwarz** devem satisfazer as relações:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v) \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v) \right) \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v) \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v) \right) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{\partial^2 N}{\partial v \partial u}(u, v) \end{cases} \quad (37)$$

Substituindo (29) na primeira equação de (37), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\Gamma_{11}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{11}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + e \cdot N(u, v) \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial u} \left(\Gamma_{12}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{12}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + f \cdot N(u, v) \right) \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^1)_v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{11}^1 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v) + (\Gamma_{11}^2)_v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \Gamma_{11}^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(u, v) + e_v \cdot N(u, v) + \\ + e \cdot \frac{\partial N}{\partial v}(u, v) = \\ = (\Gamma_{12}^1)_u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{12}^1 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(u, v) + (\Gamma_{12}^2)_u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \Gamma_{12}^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(u, v) + \\ + f_u \cdot N(u, v) + f \cdot \frac{\partial N}{\partial u}(u, v) \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas de ordem dois e $\frac{\partial N}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial N}{\partial v}(u, v)$ por suas expressões dadas em (29), obtemos:

$$\begin{aligned}
& (\Gamma_{11}^1)_v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{11}^1 \cdot \left(\Gamma_{12}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{12}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + f \cdot N(u, v) \right) + (\Gamma_{11}^2)_v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \\
& + \Gamma_{11}^2 \cdot \left(\Gamma_{22}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{22}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + g \cdot N(u, v) \right) + e_v \cdot N(u, v) + \\
& + e \cdot \left(\frac{g \cdot F - e \cdot G}{E \cdot G - F^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{f \cdot F - g \cdot E}{E \cdot G - F^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) = \\
& = (\Gamma_{12}^1)_u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{12}^1 \cdot \left(\Gamma_{11}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{11}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + e \cdot N(u, v) \right) + (\Gamma_{12}^2)_u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \\
& + \Gamma_{12}^2 \cdot \left(\Gamma_{12}^1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \Gamma_{12}^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + f \cdot N(u, v) \right) + \\
& + f_u \cdot N(u, v) + f \cdot \left(\frac{f \cdot F - e \cdot G}{E \cdot G - F^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{e \cdot F - f \cdot E}{E \cdot G - F^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right)
\end{aligned}$$

A ifualdade acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \left((\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{12}^1 + \right. \\
& + e \cdot \frac{g \cdot F - e \cdot G}{E \cdot G - F^2} - f \cdot \frac{f \cdot F - e \cdot G}{E \cdot G - F^2} \Big) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \\
& + \left(\Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)^2 + \right. \\
& + e \cdot \frac{f \cdot F - g \cdot E}{E \cdot G - F^2} - f \cdot \frac{e \cdot F - f \cdot E}{E \cdot G - F^2} \Big) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \\
& + \left(\Gamma_{11}^1 \cdot f + \Gamma_{11}^2 \cdot g + e_v - \Gamma_{12}^1 \cdot e - \Gamma_{12}^2 \cdot f - f_u \right) \cdot N(u, v) = \vec{0}
\end{aligned}$$

Igualando a segunda coordenada a zero, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{e \cdot f \cdot F - e \cdot g \cdot E - e \cdot f \cdot F + f^2 \cdot E}{E \cdot G - F^2} = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 \\
& - E \cdot \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2} = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2
\end{aligned}$$

donde decorre:

$$-E \cdot \kappa = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2 \quad (38)$$

que é uma das **equações de Gauss** (as equações de Gauss são aquelas obtidas substituindo as expressões de (29) na primeira e na segunda equação de (37)). Assim, temos:

$$\kappa = -\frac{(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \cdot \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \cdot \Gamma_{22}^2}{E}$$

Do fato de os símbolos de Christoffel dependerem unicamente da primeira forma fundamental e da expressão acima, concluímos o:

Teorema 100 (Teorema Egrégio de Gauss) *A curvatura gaussiana só depende da primeira forma fundamental.*

Note que o **Teorema Egrégio de Gauss** nos permite concluir que determinadas superfícies não são isométricas. Por exemplo, não existe uma isometria, portanto, uma transformação que preserve comprimento de curvas, entre uma região do plano e uma região da esfera, já que a curvatura gaussiana do plano é identicamente nula e a curvatura da esfera é estritamente positiva.

Igualando a coordenada de $N(u, v)$ a 0, obtemos:

$$e_v - f_u = e \cdot \Gamma_{12}^1 + f \cdot (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g \cdot \Gamma_{11}^2$$

que é uma das equações de Codazzi-Mainardi. A outra pode ser obtida usando a terceira equação de (37)

References

- [1] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*, 2ª edição revisada, Editora Blücher, 2008.
- [2] CARMO, M. P. *Elementos de Geometria Diferencial*, Editora Ao Livro Técnico S.A., 1971.
- [3] MCCLEARY, J. *Geometry from a Differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press, 1997.
- [4] O'NEILL, B., *Elementary Differential Geometry*. 2ª edição revisada, Elsevier Academic Press Publications, 2006.
- [5] https://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/gausseng/ehpp/ehpp.html