



Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho (Unesp)
Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE)
Departamento de Matemática

Plano de Ensino da Disciplina Geometria Diferencial

Dados de Identificação	
Docente responsável:	Jean Cerqueira Berni
Contato do professor:	j.berni@unesp.br
Disciplina:	MAT0030 - Geometria Diferencial

1 Apresentação

A grosso modo, a Geometria Diferencial Clássica é o estudo das propriedades locais de curvas e de superfícies — objetos de dimensão 1 e 2, respectivamente. Por propriedades locais entendem-se aquelas propriedades que dependem exclusivamente do comportamento da curva ou superfície *em uma vizinhança de um ponto*. Os métodos que se revelaram mais adequados *nesta* abordagem da Geometria Diferencial foram exatamente os do Cálculo Diferencial, já conhecido de vocês. Por este motivo, as curvas e as superfícies consideradas na Geometria Diferencial serão definidas mediante funções que podem ser derivadas um certo número de vezes.

Por se tratar de um primeiro contato com o estudo da Geometria Diferencial, neste curso nos restringiremos ao estudo de curvas e de superfícies no espaço euclidiano. Esta delimitação de nosso campo de investigação nos permitirá aproveitar exatamente nossa “intuição geométrica”.

A teoria que desenvolveremos ao longo deste curso *não é* a única abordagem possível ao estudo da Geometria Diferencial, existindo também a abordagem sintética (isto é, axiomática, cf. [1]), que requer certos formalismos categoriais que, em geral, não são vistos num curso de graduação em Matemática.

Neste curso vamos primeiramente estudar as “curvas parametrizadas regulares” em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3 . Estudaremos conceitos importantes como o de curvatura e o de torção de uma curva, demonstrando que tais dados, em certo sentido, caracterizam completamente uma curva a menos de um “movimento rígido”.

Num segundo momento, faremos um estudo das “superfícies diferenciáveis”, abordando os principais conceitos a elas associados, como a curvatura gaussiana em um de seus pontos, as formas fundamentais dentre outros. Ao fim do curso veremos um teorema poderoso, capaz de relacionar a geometria com a topologia de uma superfície diferenciável (O Teorema de Gauss-Bonnet).

Para um bom aproveitamento do curso, é suficiente que o aluno conheça a Álgebra Linear e o Cálculo Diferencial em uma e em duas variáveis reais. Seguiremos diversas referências ao longo do curso, sendo as principais [3], [2] e [5].

2 Dados Gerais do Curso

1. **Horários:** terças-feiras, das 08h às 10h e sextas-feiras, das 10h às 12h;
2. **Datas Previstas dos Encontros:** 29/8, 01/9, 05/9, 08/9, 12/9, 15/9, 19/9, 22/9, 26/9, 29/9, 3/10, 06/10, 10/10, 17/10, 20/10, 24/10, 27/10, 31/10, 07/11, 10/11, 17/11, 21/11, 24/11, 28/11, 01/12, 05/12 e 08/12;
3. **Método de avaliação:** Duas provas escritas, cujas notas serão denotadas por P_1 e P_2 , respectivamente, e uma apresentação oral, cuja nota será denotada por A ;
4. **Média final preliminar:** $M_{FP} = \frac{2 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + A}{5}$
5. **Exame:** prova à qual faz jus o aluno com frequência mínima de 70% e média final preliminar *menor* que 5 (base legal: Resolução Unesp número 75, de 2016). A nota obtida no exame será denotada por E ;
6. **Critério de Aprovação:** frequência igual ou superior a 70% e nota final igual ou superior a 5 (base legal: seção IV, artigo 9º da Resolução Unesp número 106 de 2012)
7. **Regime de Recuperação:** contínuo, ou seja, por meio de atividades feitas ao longo do semestre, como atividades em grupo, exercícios extras sobre conteúdos abordados na disciplina ou outras atividades semelhantes (conforme plano de ensino da disciplina). O cumprimento bem sucedido de tais atividades repercutirá na possível elevação da média final preliminar (M_{FP});
8. **Média final:** Se a média final preliminar for igual ou superior a 5, então $M_F = M_{FP}$; se $M_F < 5$, então $M_F = \frac{M_{FP} + E}{2}$.
9. **Exercícios Domiciliares:** trata-se da compensação às ausências às aulas de alunos que necessitem de tratamento excepcional, temporariamente impossibilitados de frequência, mas em condições de aprendizagem (alunos que estejam sofrendo de afecções congênitas ou adquiridas, infecções, traumatismos ou outras condições mórbidas, desde que se constituam em ocorrência isolada; também fazem jus a este regime toda gestante, por um período de 120 dias, a partir do 8º mês de gestação). Para mais detalhes de como proceder nestes casos, verifique a base legal: Resolução Unesp número 23 de 2022.

3 Objetivos do Curso

Ao final deste curso, o aluno deverá:

1. Compreender a ideia e a definição de curva regular e de curva parametrizada pelo comprimento de arco; Conceituar curvatura e torção de uma curva regular, conhecendo suas inter-relações estabelecidas por meio das fórmulas de Frenet;
2. Saber construir e manipular o **Teorema Fundamental das Curvas**
3. Conhecer os conceitos de involuta e evoluta de uma curva plana;

4. Reconhecer e manipular a definição de superfície diferenciável, superfície regular, bem como o conceito de plano tangente, primeira forma fundamental e a aplicação de Gauss;
5. Compreender a segunda forma fundamental, bem como os conceitos de curvatura normal e curvaturas principais;
6. Caracterizar pontos dos tipos elíptico, hiperbólico, parabólico e planar;
7. Conhecer a geometria intrínseca das superfícies, reconhecendo o conceito de isometria;
8. Reconhecer que a curvatura Gaussiana de uma superfície é invariante sob isometrias locais, por meio do **Teorema Egrégio de Gauss**;
9. Conhecer o **Teorema Fundamental para Superfícies**;
10. Conhecer o conceito de curvatura geodésica e de curva geodésica;
11. Conhecer o **Teorema de Gauss-Bonnet**

4 Conteúdo Programático

O conteúdo programático do curso estará dividido em agendas, correspondentes, aproximadamente, a duas aulas (4 horas), como segue:

- **Agenda 01:** Curvas em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3 ;
- **Agenda 02:** Superfícies regulares;
- **Agenda 03:** A primeira forma fundamental;
- **Agenda 04:** A aplicação de Gauss e sua geometria;
- **Agenda 05:** A segunda forma fundamental;
- **Agenda 06:** Isometrias e o Teorema Egrégio de Gauss;
- **Agenda 07:** Curvatura geodésica;
- **Agenda 08:** O Teorema de Gauss-Bonnet.

5 Metodologia de Ensino

- Aulas expositivas;
- Atividades participativas;
- Discussões em grupo (resolução de problemas).

Referências

- [1] BERNI, J.C.; MARIANO, H.L. **A Geometria Diferencial Sintética e os Mundos onde Podemos Interpretá-la: Um convite ao estudo dos anéis $C^{\infty,m}$** Revista Matemática Universitária, 2022, volume 1, disponível em <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/11/sites/11/2022/09/2022-v1-1.pdf>, acesso em 23/8/2023.
- [2] CARMO, M. P. **Elementos de Geometria Diferencial**. Livros Técnicos e Científicos, 1971.
- [3] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2ª ed. Editora Edgard Blücher, 2008.
- [4] MCCLEARY, J. **Geometry from a Differentiable Viewpoint**. Cambridge University Press, 1994.
- [5] O'NEIL, B. **Elementary Differential Geometry**. Academic Press, 1966.