

MAT0030 - GEOMETRIA DIFERENCIAL

MATERIAL SUPLEMENTAR

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Neste material apresentaremos o **Teorema Fundamental das Curvas no Espaço**. Vamos definir a relação de congruência entre curvas no espaço: dizemos que duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são *congruentes* sempre que existir uma isometria $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = F \circ \alpha$. Veremos, primeiramente, que se α e β são congruentes, então α e β têm exatamente a mesma curvatura e a mesma torção. Posteriormente, veremos que as funções curvatura e torção caracterizam completamente uma curva no espaço (contanto que a curvatura seja estritamente positiva).

Deste modo, veremos que duas curvas p.p.c.a. de curvatura não-nula são congruentes se, e somente se, tiverem a mesma curvatura e a mesma torção em cada um de seus pontos.

1 Teorema Fundamental das Curvas

Vejamos agora que se duas curvas parametrizadas por comprimento de arco diferem exclusivamente por uma isometria, então elas têm a mesma curvatura e a mesma torção (esta última a menos de sinal), e como se relacionam seus referenciais de Frenet:

Proposição 1 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, tal que a curvatura $(\forall s \in I)(\kappa(s) > 0)$. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma isometria e $\bar{\alpha} = F \circ \alpha$. Então $\bar{\alpha}$ é uma curva regular parametrizada por comprimento de arco e vale:*

$$(\forall s \in I) \begin{cases} \kappa_{\bar{\alpha}}(s) = \kappa(s) \\ \tau_{\bar{\alpha}}(s) = \pm \tau(s) \\ \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s) = dF_{\alpha(s)}(\vec{T}_{\alpha}(s)) \\ \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s) = dF_{\alpha(s)}(\vec{N}_{\alpha}(s)) \\ \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s) = \pm dF_{\alpha(s)}(\vec{B}_{\alpha}(s)) \end{cases}$$

*j.berni@unesp.br

Como $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria, F é diferenciável. Ademais, como $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável, segue da **Regra da Cadeia** que $\tilde{\alpha} = F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é também uma curva diferenciável. Por definição:

$$(\forall s \in I)(\tilde{\alpha}'(s) = dF_{\alpha(s)} \cdot \alpha'(s) = dF_{\alpha(s)} \cdot \vec{T}_\alpha(s)) \quad (1)$$

de modo que:

$$(\forall s \in I)(\|\tilde{\alpha}'(s)\| = \|dF_{\alpha(s)} \cdot \vec{T}_\alpha(s) - dF_{\alpha(s)} \cdot \vec{0}\| = \|\vec{T}_\alpha(s) - \vec{0}\| = \|\vec{T}_\alpha(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1)$$

de modo que $\tilde{\alpha}$ está parametrizada por comprimento de arco. Por (1), temos:

$$(\forall s \in I)(\vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s) = dF_{\alpha(s)}(\vec{T}_\alpha(s))) \quad (2)$$

daí,

$$(\forall s \in I)(\vec{T}'_{\tilde{\alpha}}(s) = dF_{\alpha(s)}(\vec{T}'_\alpha(s))) \quad (3)$$

Como $dF_{\alpha(s)}$ preserva produto interno, temos, para todo $s \in I$:

$$(\forall s \in I)(\kappa_{\tilde{\alpha}}(s) = \|\tilde{\alpha}''(s)\| = \|\vec{T}'_{\tilde{\alpha}}(s)\| = \|dF_{\alpha(s)}(\vec{T}'_\alpha(s))\| = \|\vec{T}'_\alpha(s)\| = \|\alpha''(s)\| = \kappa_\alpha(s))$$

Assim,

$$\vec{N}_{\tilde{\alpha}}(s) = \frac{\tilde{\alpha}''(s)}{\kappa_{\tilde{\alpha}}(s)} = \frac{dF_{\alpha(s)}(\alpha''(s))}{\kappa_\alpha(s)} \stackrel{\text{linearidade}}{=} dF_{\alpha(s)}\left(\frac{\alpha''(s)}{\kappa_\alpha(s)}\right) = dF_{\alpha(s)}(\vec{N}_\alpha(s)) \quad (4)$$

Como F preserva orientação, temos:

$$(\forall s \in I) \left(\langle dF_{\alpha(s)}(\vec{T}_\alpha(s)) \times dF_{\alpha(s)}(\vec{N}_\alpha(s)), dF_{\alpha(s)}(\vec{B}_\alpha(s)) \rangle = \langle \vec{T}_\alpha(s) \times \vec{N}_\alpha(s), \vec{B}_\alpha(s) \rangle = \right. \\ \left. F \text{ isometria} \langle dF_{\alpha(s)}(\vec{T}_\alpha(s) \times \vec{N}_\alpha(s)), dF_{\alpha(s)}(\vec{B}_\alpha(s)) \rangle \right)$$

Como a igualdade acima vale para qualquer que seja $s \in I$, segue que:

$$(\forall s \in I)(\vec{B}_{\tilde{\alpha}}(s) = \vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s) \times \vec{N}_{\tilde{\alpha}}(s) = dF_{\alpha(s)}(\vec{T}_\alpha(s)) \times dF_{\alpha(s)}(\vec{N}_\alpha(s)) = dF_{\alpha(s)}(\underbrace{\vec{T}_\alpha(s) \times \vec{N}_\alpha(s)}_{=\vec{B}_\alpha(s)})) \quad (5)$$

Segue de (1), (4) e (5), que:

$$\vec{B}_{\tilde{\alpha}}(s) = \vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s) \times \vec{N}_{\tilde{\alpha}}(s) = dF_{\alpha(s)}(\vec{B}_\alpha(s))$$

Finalmente,

$$\tau_{\tilde{\alpha}}(s) = \langle \vec{B}'_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{N}_{\tilde{\alpha}}(s) \rangle = \langle dF_{\alpha(s)}(\vec{B}'_{\alpha}(s)), dF_{\alpha(s)}(\vec{N}'_{\alpha}(s)) \rangle dF_{\alpha(s)} \text{ ortogonal } \langle \vec{B}'_{\alpha}(s), \vec{N}_{\alpha}(s) \rangle = \tau_{\alpha}(s)$$

O caso em que F inverte orientação é demonstrado analogamente.

Definição 2 Duas curvas, $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são **paralelas** se, e somente se, existir uma translação $T_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(\forall s \in I)(T_p \circ \alpha = \beta)$

Lema 3 Duas curvas, $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são paralelas se seus vetores velocidade em cada ponto $s \in I$, $\alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \alpha'_3(s))$ e $\beta'(s) = (\beta'_1(s), \beta'_2(s), \beta'_3(s))$ são paralelos. Neste caso, se para algum $s_0 \in I$ tivermos $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$, então $\alpha = \beta$.

Por definição, se $\alpha'(s)$ e $\beta'(s)$ são paralelos, eles têm as mesmas coordenadas euclidianas, ou seja, tem-se:

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\}) (\alpha_i(s) = \beta_i(s))$$

Assim,

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\}) (\alpha'_i(s) = \beta'_i(s))$$

Pelo que sabemos do Cálculo, as equações acima implicam que existem números reais $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\}) (\beta_i(s) = \alpha_i(s) + p_i)$$

e portanto:

$$(\forall s \in I) (\beta(s) = \alpha(s) + (p_1, p_2, p_3) = T_{(p_1, p_2, p_3)}(\alpha))$$

Definição 4 Duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ são **congruentes** se, e somente se, existir uma isometria $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = F \circ \alpha$.

Intuitivamente, curvas congruentes são idênticas, a menos de sua posição no espaço. Podemos interpretá-las como movimentos percorridos por “caminhos” de mesma forma.

Para decidir quando duas curvas, $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, são congruentes, dificilmente poderíamos testar *todas* as isometrias de $\mathbb{R}^3$ e verificar se alguma delas aplica α sobre β ou vice-versa. O teorema a seguir nos dá uma forma de decidir quando duas curvas são congruentes de um modo indireto, comparando duas funções escalares, quais sejam, sua curvatura e sua torção.

Teorema Fundamental das Curvas no Espaço

(a) Dadas duas funções diferenciáveis:

$$\begin{array}{ccc} \kappa : I \subseteq \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \kappa(s) \end{array}$$

c com $(\forall s \in I)(\kappa(s) > 0)$ e:

$$\begin{array}{ccc} \tau : I \subseteq \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \tau(s) \end{array}$$

existe uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada por comprimento de arco, tal que $\kappa(s)$ é a curvatura de α no ponto $s \in I$ e $\tau(s)$ é a torção de α em s ;

- (b) A curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é única se fixarmos um ponto $\alpha(s_0) = p_0 \in \mathbb{R}^3$, $\alpha'(s_0) = v_1$ e $\alpha''(s_0) = \kappa(s_0) \cdot v_2$, com v_1 e v_2 ortonormais;
- (c) Se duas curvas, $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ têm a mesma curvatura e a mesma torção (a menos de sinal), então α e β são congruentes.

Ad (a): Para provar a existência de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, basta mostrarmos que existe um referencial ortonormal, $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ que satisfaz as fórmulas de Frenet, e em seguida definir:

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \vec{T}(t) dt$$

Denotemos por $\vec{T}(s) = (T_1(s), T_2(s), T_3(s))$, $\vec{N}(s) = (N_1(s), N_2(s), N_3(s))$ e $\vec{B}(s) = (B_1(s), B_2(s), B_3(s))$. Queremos demonstrar a existência de funções $T_i(s), N_i(s), B_i(s)$, com $i \in \{1, 2, 3\}$ que satisfazem o sistema de nove equações diferenciais:

$$T'_i(s) = \kappa(s) \cdot N_i(s) N'_i(s) = -\kappa(s) \cdot T_i(s) - \tau(s) \cdot B_i(s) B'_i(s) = \tau(s) \cdot N_i(s) \quad (6)$$

para $i \in \{1, 2, 3\}$. Do **Teorema de Existência e Unicidade** da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias, concluímos que, fixados $s_0 \in I$, os valores $T_i(s_0), N_i(s_0), B_i(s_0)$, $1 \leq i \leq 3$, existe uma única solução para (6).

Em particular, existe uma única solução, $T_i, N_i, B_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$ de (6) quando fixamos:

$$\begin{cases} \vec{T}(s_0) = (T_1(s_0), T_2(s_0), T_3(s_0)) = (1, 0, 0) \\ \vec{N}(s_0) = (N_1(s_0), N_2(s_0), N_3(s_0)) = (0, 1, 0) \\ \vec{B}(s_0) = (B_1(s_0), B_2(s_0), B_3(s_0)) = (0, 0, 1) \end{cases} \quad (7)$$

Provemos, agora, que a esta solução $\{\vec{T}(s) = (T_1(s), T_2(s), T_3(s)), \vec{N}(s) = (N_1(s), N_2(s), N_3(s)), \vec{B}(s) = (B_1(s), B_2(s), B_3(s)) \mid s \in I\}$ é um referencial ortonormal. Para isto, consideremos o seguinte sistema de equações para as funções $\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle, \langle \vec{N}(s), \vec{N}(s) \rangle, \langle \vec{B}(s), \vec{B}(s) \rangle, \langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle, \langle \vec{T}(s), \vec{B}(s) \rangle$ e $\langle \vec{B}(s), \vec{N}(s) \rangle$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds} \langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle = 2 \cdot \kappa(s) \cdot \langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \vec{N}(s), \vec{N}(s) \rangle = -2 \cdot \kappa(s) \cdot \langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle - 2 \cdot \tau(s) \cdot \langle \vec{B}(s), \vec{N}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \vec{B}(s), \vec{B}(s) \rangle = 2 \cdot \tau(s) \cdot \langle \vec{B}(s), \vec{N}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle = \kappa(s) \cdot \langle \vec{N}(s), \vec{N}(s) \rangle - \kappa(s) \cdot \langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle - \tau(s) \cdot \langle \vec{T}(s), \vec{B}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \vec{T}(s), \vec{B}(s) \rangle = \kappa(s) \cdot \langle \vec{B}(s), \vec{N}(s) \rangle + \tau(s) \cdot \langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle \vec{B}(s), \vec{N}(s) \rangle = \tau(s) \cdot \langle \vec{N}(s), \vec{N}(s) \rangle - \kappa(s) \cdot \langle \vec{T}(s), \vec{B}(s) \rangle - \tau(s) \cdot \langle \vec{B}(s), \vec{B}(s) \rangle \end{array} \right. \quad (8)$$

sujeitos às condições iniciais:

$$\langle \vec{T}(s_0), \vec{T}(s_0) \rangle = \langle \vec{N}(s_0), \vec{N}(s_0) \rangle = \langle \vec{B}(s_0), \vec{B}(s_0) \rangle = 1$$

$$\langle \vec{T}(s_0), \vec{N}(s_0) \rangle = \langle \vec{T}(s_0), \vec{B}(s_0) \rangle = \langle \vec{B}(s_0), \vec{N}(s_0) \rangle = 0$$

A solução para este problema de valor inicial é única e é dada pelas funções:

$$\langle \vec{T}(s), \vec{T}(s) \rangle = \langle \vec{N}(s), \vec{N}(s) \rangle = \langle \vec{B}(s), \vec{B}(s) \rangle = 1$$

$$\langle \vec{T}(s), \vec{N}(s) \rangle = \langle \vec{T}(s), \vec{B}(s) \rangle = \langle \vec{B}(s), \vec{N}(s) \rangle = 0$$

De fato, basta substituir estas funções no sistema acima para verificar que formam uma solução do sistema. Portanto, a solução de (6) sob as coindições iniciais (7) forma um referencial ortonormal para todo $s \in I$. Além disso, $\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s)$, já que vale $\vec{B}(s_0) = \vec{T}(s_0) \times \vec{N}(s_0)$.

Definimos a curva:

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto \int_{s_0}^s \vec{T}(s) ds \end{aligned}$$

Como $\vec{T}(s)$ é um vetor unitário, obtemos $(\forall s \in I)(\alpha'(s) = \vec{T}(s))$, de modo que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada por comprimento de arco. Além disso, $\alpha''(s) = \vec{T}'(s)$. Segue-se de (6) que $\alpha''(s) = \kappa(s) \cdot \vec{N}(s)$. Como $\vec{N}(s)$ é unitário e $(\forall s \in I)(\kappa(s) > 0)$, temos que $\vec{N}(s)$ é o vetor unitário na direção de $\alpha''(s)$, ou seja, $\vec{N}(s)$ é o vetor normal a $\alpha(s)$, e portanto $\kappa(s)$ é a curvatura de α , e concluímos de (6) que τ é a torção de α .

Ad **(b)**: Para provar que a curva α é única, quando fixamos $\alpha(s_0) = p_0, \alpha'(s_0) = v_1$ e $\alpha''(s_0) = \kappa(s_0) \cdot v_2$, em que v_1 e v_2 são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^3$ corresponde a provar, inicialmente, que existe uma única solução do sistema (6) quando fixamos $\vec{T}(s_0) = v_1, \vec{N}(s_0) = v_2$

e $\vec{B}(s_0) = v_1 \times v_2$. Este fato decorre do teorema de existência e unicidade de solução de um sistema de equações diferenciais lineares. Obtida esta solução, $\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)$, prova-se que é um referencial ortonormal usando o sistema (8). Como a curva α deve satisfazer $\alpha'(s) = \vec{T}(s)$, concluímos que:

$$\alpha(s) = p_0 + \int_{s_0}^s \vec{T}(s) ds$$

Assim, os itens (a) e (b) ficam demonstrados.

No decorrer da demonstração do item (c), denotaremos por κ_α e por τ_α a curvatura e a torção de α , respectivamente, e por κ_β e por τ_β a curvatura e a torção de β , respectivamente.

Ad (c): A ideia é considerar uma isometria, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, conveniente e a curva $\bar{\alpha} = F \circ \alpha$, que é congruente a $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, e em seguida provar que $\bar{\alpha} = \beta$.

Fixemos $s_0 \in I$ e suponhamos que $(\forall s \in I)(\tau_\alpha(s) = \tau_\beta(s))$ (ou seja, que as torções tenham o mesmo sinal). Temos $\{\vec{T}_\alpha(s_0), \vec{N}_\alpha(s_0), \vec{B}_\alpha(s_0)\}$ referencial ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Vimos que, nessas condições, existe $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a isometria que satisfaz:

$$F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$$

e:

$$\begin{cases} dF_{\alpha(s_0)}(\vec{T}_\alpha(s_0)) = \vec{T}_\beta(s_0) \\ dF_{\alpha(s_0)}(\vec{N}_\alpha(s_0)) = \vec{N}_\beta(s_0) \\ dF_{\alpha(s_0)}(\vec{B}_\alpha(s_0)) = \vec{B}_\beta(s_0) \end{cases}$$

Seja $\bar{\alpha} = F \circ \alpha$. Segue da **Proposição 1** e da definição de $\bar{\alpha}$ como sendo $F \circ \alpha$, que para todo $s \in I$:

$$\begin{cases} \bar{\alpha}(s_0) = \beta(s_0) \\ \kappa_{\bar{\alpha}}(s) = \kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s) \\ \tau_{\bar{\alpha}}(s) = \tau_\alpha(s) = \tau_\beta(s) \\ \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s_0) = \vec{T}_\beta(s_0) \\ \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s_0) = \vec{N}_\beta(s_0) \\ \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s_0) = \vec{B}_\beta(s_0) \end{cases}$$

Vamos demonstrar que $(\forall s \in I)(\bar{\alpha}(s) = \beta(s))$ provando que em cada ponto $s \in I$, $\bar{\alpha}(s)$ e $\beta(s)$ são paralelos. Isto equivale a demonstrar, pelo **Lema 3**, que:

$$(\forall s \in I)(\vec{T}_{\bar{\alpha}}(s) = \bar{\alpha}'(s) = \beta'(s) = \vec{T}_\beta(s))$$

e que $\tilde{\alpha}(s_0) = \beta(s_0)$.

Considere a função:

$$\begin{aligned} \varphi : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto \langle \vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{N}_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{B}_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle \end{aligned}$$

Como os vetores $\vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s)$ e $\vec{T}_{\beta}(s)$ são unitários, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$(\forall s \in I)(\langle \vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle \leq 1)$$

e além disso, tem-se $\langle \vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle = 1 \iff \vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s) = \vec{T}_{\beta}(s)$. As mesmas observações valem para os produtos internos $\langle \vec{N}_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle$ e $\langle \vec{B}_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle$, de modo que demonstrar as igualdades:

$$(\forall s \in I) \begin{cases} \vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s) = \vec{T}_{\beta}(s) \\ \vec{N}_{\tilde{\alpha}}(s) = \vec{N}_{\beta}(s) \\ \vec{B}_{\tilde{\alpha}}(s) = \vec{B}_{\beta}(s) \end{cases}$$

equivale a demonstrar que:

$$(\forall s \in I)(\varphi(s) = 3)$$

Para tanto, basta mostrarmos que $(\forall s \in I)(\varphi'(s) = 0)$. Mas,

$$\begin{aligned} (\forall s \in I) \left(\varphi'(s) = \langle \vec{T}'_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{T}'_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{N}'_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{N}_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{N}'_{\beta}(s) \rangle + \right. \\ \left. + \langle \vec{B}'_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{B}_{\tilde{\alpha}}(s), \vec{B}'_{\beta}(s) \rangle \right) \end{aligned}$$

Sabendo que, pelas fórmulas de Frenet, temos:

$$\begin{cases} \vec{T}'_{\tilde{\alpha}}(s) = \kappa_{\tilde{\alpha}}(s) \cdot \vec{N}_{\tilde{\alpha}}(s) \\ \vec{T}'_{\beta}(s) = \kappa_{\beta}(s) \cdot \vec{N}_{\beta}(s) \\ \vec{N}'_{\tilde{\alpha}}(s) = -\kappa_{\tilde{\alpha}}(s) \cdot \vec{T}_{\tilde{\alpha}}(s) - \tau_{\tilde{\alpha}}(s) \cdot \vec{B}_{\tilde{\alpha}}(s) \\ \vec{N}'_{\beta}(s) = -\kappa_{\beta}(s) \cdot \vec{T}_{\beta}(s) - \tau_{\beta}(s) \cdot \vec{B}_{\beta}(s) \\ \vec{B}'_{\tilde{\alpha}}(s) = \tau_{\tilde{\alpha}}(s) \cdot \vec{N}_{\tilde{\alpha}}(s) \\ \vec{B}'_{\beta}(s) = \tau_{\beta}(s) \cdot \vec{N}_{\beta}(s) \end{cases}$$

Fazendo as substituições dadas pelas fórmulas de Frenet acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\forall s \in I) \left(\varphi'(s) &= \langle \vec{T}'_{\bar{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{T}'_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{N}'_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}'_{\beta}(s) \rangle + \right. \\
&\quad \left. + \langle \vec{B}'_{\bar{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{B}'_{\beta}(s) \rangle = \right. \\
&= \langle \kappa_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s), \kappa_{\beta}(s) \cdot \vec{N}_{\beta}(s) \rangle + \langle -\kappa_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s) - \tau_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle + \\
&\quad \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), -\kappa_{\beta}(s) \cdot \vec{T}_{\beta}(s) - \tau_{\beta}(s) \cdot \vec{B}_{\beta}(s) \rangle + \langle \tau_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle + \langle \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s), \tau_{\beta}(s) \cdot \vec{N}_{\beta}(s) \rangle = \\
&= \kappa_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle + \kappa_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle - \kappa_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle - \tau_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle - \\
&\quad - \kappa_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle - \tau_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle + \tau_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle + \tau_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle \rangle
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, valem $(\forall s \in I)(\kappa_{\bar{\alpha}}(s) = \kappa_{\beta}(s))$ e $(\forall s \in I)(\tau_{\bar{\alpha}}(s) = \tau_{\beta}(s))$, podemos cancelar os termos na última igualdade e obter, para qualquer $s \in I$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(s) &= \kappa_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle + \kappa_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle - \kappa_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle - \tau_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle - \\
&- \kappa_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle - \tau_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle + \tau_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle + \tau_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle = \\
&= \left(\kappa_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle - \kappa_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{T}_{\beta}(s) \rangle \right) + \left(\kappa_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle - \kappa_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle \right) \\
&+ \left(-\tau_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle + \tau_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{N}_{\beta}(s) \rangle \right) + \left(-\tau_{\beta}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle + \tau_{\bar{\alpha}}(s) \cdot \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s), \vec{B}_{\beta}(s) \rangle \right) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $(\forall s \in I)(\varphi'(s) = 0)$, e portanto que φ é uma função constante. Finalmente, como:

$$\begin{aligned}
\varphi(s_0) &= \langle \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s_0), \vec{T}_{\beta}(s_0) \rangle + \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s_0), \vec{N}_{\beta}(s_0) \rangle + \langle \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s_0), \vec{B}_{\beta}(s_0) \rangle = \\
&= \langle \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s_0), \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s_0) \rangle + \langle \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s_0), \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s_0) \rangle + \langle \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s_0), \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s_0) \rangle = \|\vec{T}_{\bar{\alpha}}(s_0)\|^2 + \|\vec{N}_{\bar{\alpha}}(s_0)\|^2 + \|\vec{B}_{\bar{\alpha}}(s_0)\|^2 = \\
&= 1 + 1 + 1 = 3
\end{aligned}$$

Desta forma, fica demonstrado que para qualquer $s \in I$, tem-se:

$$(\forall s \in I) \begin{cases} \vec{T}_{\bar{\alpha}}(s) = \vec{T}_{\beta}(s) \\ \vec{N}_{\bar{\alpha}}(s) = \vec{N}_{\beta}(s) \\ \vec{B}_{\bar{\alpha}}(s) = \vec{B}_{\beta}(s) \end{cases}$$

e que, portanto, $\bar{\alpha} = \beta$.

Assim, qualquer curva regular parametrizada por comprimento de arco fica completamente determinada, a menos de isometrias, por sua curvatura e por sua torção.

References

- [1] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*, 2^a edição revisada, Editora Blücher, 2008.
- [2] O'NEILL, B., *Elementary Differential Geometry*. 2^a edição revisada, Elsevier Academic Press Publications, 2006.