CATALOG

MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP

Primeira Prova — 01/04/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 08h30min.
4. As questões dissertativas podem ser feitas a tinta (azul ou preta) ou a lápis.
5. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho. Só será considerado na correção das questões dissertativas o que estiver na folha com seu enunciado.
6. Mantenha a organização, limpeza e legibilidade na redação das questões dissertativas, **justificando todas as suas afirmações**.
7. Preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as primeiras colunas em branco, caso tenha menos de 8 dígitos), número da turma (de matrícula nesta disciplina), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito antes da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
8. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
9. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
10. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Teste 1 [`confder1`] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \sin x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $f(0) = 1$.

(II) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x^2} = 1$.

(III) f é contínua em $x = 0$.

(IV) $f'(0) = 0$.

São verdadeiras as seguintes afirmações:

■ todas.
B somente (I), (II) e (III).
C somente (I), (III) e (IV).
D somente (I) e (IV).
E somente (I) e (III).

Solução: Aplicando $x = 0$ na desigualdade temos que $1 \leq f(0) \leq 1$, donde $f(0) = 1$. Ainda segue que, se $x \neq 0$, $\dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{f(x) - 1}{x^2} \leq 1$ (pois $x^2 \geq 0$) e portanto, pelo teorema do confronto, $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x^2} = 1$. A função é contínua em $x = 0$, pois $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Finalmente $f'(0) = 0$, em cálculo análogo do limite pedido.

Teste 2 [`confder2`] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $x \sin x + 2 \leq f(x) \leq x^2 + 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

(I) $f(0) = 2$.

(II) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x^2} = 1$.

(III) f é contínua em $x = 0$.

(IV) $f'(0) = 1$.

São verdadeiras as seguintes afirmações:

■ somente (I), (II) e (III).
B todas.
C somente (I), (III) e (IV).
D somente (I) e (IV).
E somente (I) e (III).

Solução: Aplicando $x = 0$ na desigualdade temos que $2 \leq f(0) \leq 2$, donde $f(0) = 2$. Ainda segue que, se $x \neq 0$, $\dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{f(x) - 2}{x^2} \leq 1$ (pois $x^2 \geq 0$) e portanto, pelo teorema do confronto, $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x^2} = 1$. A função é contínua em $x = 0$, pois $\lim_{x \to 0} f(x) = 2 = f(0)$. Finalmente $f'(0) = 0$, em cálculo análogo do limite pedido.

Teste 3 [`derimpl1`] Seja $y = f(x)$ uma função derivável dada implicitamente pela equação

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{25}{3}(y^2 - x^2).$$

A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, 2)$ é paralela à reta de equação:

- ■ $11x - 2y + 3 = 0.$
- B $11x + 2y - 3 = 0.$
- C $x - 2y + 3 = 0.$
- D $x + 2y - 3 = 0.$
- E $11x - y = 0.$

Solução: Derivando implicitamente, supondo $y = y(x)$, temos

$$2\big(x^2 + y^2(x)\big)\big(2x + 2y(x)y'(x)\big) = \frac{25}{3}\big(2y(x)y'(x) - 2x\big).$$

Subsituindo $x = -1$ e $y = 2 = y(1)$, obtemos

$$2 \times 5 \times \big(-2 + 4y'(1)\big) = \frac{25}{3}\big(4y'(1) + 2\big) \implies y'(1) = \frac{11}{2},$$

que é o coeficiente angular da reta tangente à curva. Dentre as alternativas a única reta paralela a ela é $11x - 2y + 3 = 0$.

Teste 4 [`derimpl2`] Seja $y = f(x)$ uma função derivável dada implicitamente pela equação

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{25}{3}(y^2 - x^2).$$

A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, -2)$ é paralela à reta de equação:

- ■ $11x + 2y - 3 = 0.$
- B $11x - 2y + 3 = 0.$
- C $x - 2y + 3 = 0.$
- D $x + 2y - 3 = 0.$
- E $11x - y = 0.$

Solução: Derivando implicitamente, supondo $y = y(x)$, temos

$$2\big(x^2 + y^2(x)\big)\big(2x + 2y(x)y'(x)\big) = \frac{25}{3}\big(2y(x)y'(x) - 2x\big).$$

Subsituindo $x = -1$ e $y = -2 = y(-1)$, obtemos

$$2 \times 5 \times \big(-2 - 4y'(-1)\big) = \frac{25}{3}\big(-4y'(-1) + 2\big) \implies y'(-1) = -\frac{11}{2},$$

que é o coeficiente angular da reta tangente à curva. Dentre as alternativas a única reta paralela a ela é $11x + 2y - 3 = 0$.

Teste 5 [limitada1] Considere funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com f limitada. Assinale a afirmação **incorreta**.

■ Se $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = +\infty$.

B Se $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

C Se $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = +\infty$.

D Se $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 0} g(x)f^2(x) + g^2(x)f(x) = 0$.

E Se $g(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 0} \dfrac{|f(x)| + 1}{g(x)} = -\infty$.

Solução: Basta considerar $f(x) \equiv -1$, obtendo então um contra-exemplo. As demais afirmações são verdadeiras, seguindo diretamente das propriedades vista em sala, como o teorema do confronto, por exemplo.

Teste 6 [limitada2] Considere funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com g limitada. Assinale a afirmação **incorreta**.

■ Se $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = +\infty$.

B Se $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

C Se $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = +\infty$.

D Se $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to 0} g(x)f^2(x) + g^2(x)f(x) = 0$.

E Se $f(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to 0} \dfrac{|g(x)| + 1}{f(x)} = -\infty$.

Solução: Basta considerar $g(x) \equiv -1$, obtendo então um contra-exemplo. As demais afirmações são verdadeiras, seguindo diretamente das propriedades vista em sala, como o teorema do confronto, por exemplo.

Teste 7 [limites1] Os limites $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{5x^4}}$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2}}{2x}$ valem, respectivamente:

■ $2/\sqrt{5}$ e $-1/2$. B $3/\sqrt{5}$ e $-1/2$. C $2/\sqrt{5}$ e $1/2$. D $-1/\sqrt{5}$ e 0. E $-1/\sqrt{5}$ e $1/2$.

Solução: Basta observar que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 - 3\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{5x^4}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{5x^4}} - \frac{3\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{5x^4}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} \underbrace{\cos x}_{\text{limitada}} \underbrace{\frac{1}{x\sqrt{x}}}_{\to 0} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

e também que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{x^2 + 1}}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Teste 8 [limites2] Os limites $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 - 2\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{5x^4}}$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{4(x^4+x^2)}}{4x}$ valem, respectivamente:

■ $3/\sqrt{5}$ e $-1/2$. B $2/\sqrt{5}$ e $-1/2$. C $2/\sqrt{5}$ e $1/2$. D $1/\sqrt{5}$ e 0. E $1/\sqrt{5}$ e $1/2$.

Solução: Basta observar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{5x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{5x^4}} - \frac{2\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{5x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \underbrace{\cos x}_{\text{limitada}} \underbrace{\frac{1}{x\sqrt{x}}}_{\to 0} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

e também que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4(x^4+x^2)}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{x^2+1}}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Teste 9 [retatg1] Sejam $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$ e r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3. Um ponto que pertence a esta reta é:

■ $(0, \pi/3 - \sqrt{3}/8)$

B $(0, \pi/6 - \sqrt{3}/8)$

C $(0, \pi/3 + \sqrt{3}/8)$

D $(0, \dfrac{\pi + 5\sqrt{3}}{6})$

E $(0, \dfrac{\pi - 5\sqrt{3}}{6})$

Solução: A reta tangente em questão tem $f'(3) = \sqrt{3}/24$ como coeficiente angular e portanto sua equação é $r : y = \arctan(3) + \sqrt{3}/24(x-3)$. Em r, quando $x = 0$ temos $y = \pi/3 - \sqrt{3}/8$.

Teste 10 [retatg2] Sejam $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$ e r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $1/3$. Um ponto que pertence a esta reta é:

■ $(0, \pi/6 - \sqrt{3}/8)$

B $(0, \pi/3 - \sqrt{3}/8)$

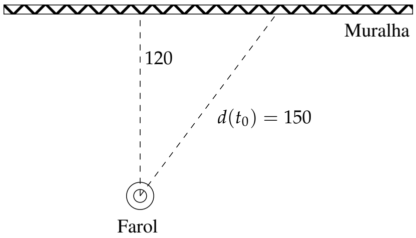
C $(0, \pi/3 + \sqrt{3}/8)$

D $(0, \dfrac{\pi + 5\sqrt{3}}{6})$

E $(0, \dfrac{\pi - 5\sqrt{3}}{6})$

Solução: A reta tangente em questão tem $f'(1/3) = 3\sqrt{3}/8$ como coeficiente angular e portanto sua equação é $r : y = \arctan(1/3) + 3\sqrt{3}/8(x - 1/3)$. Em r, quando $x = 0$ temos $y = \pi/6 - \sqrt{3}/8$.

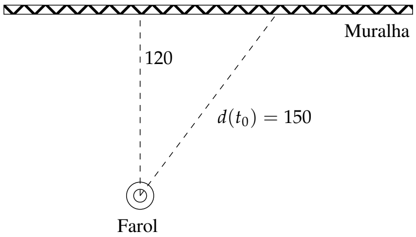
Teste 11 [`taxavar1`] Um farol, situado a uma distância de 120m de uma muralha, completa 2 voltas por minuto. Quando o facho de luz ilumina um ponto da muralha, situado a 150m do farol, a velocidade com que o ponto de luz varre a muralha é de



■ 750π m/min.
B 1125π m/min.
C 375π m/min.
D 150π m/min.
E 900π m/min.

Solução: Sendo $x(t)$ a posição do ponto de luz sobre a muralha, medida a partir da interseção dela com a sua perpendicular que passa pelo farol, e $\theta(t)$ o ângulo entre essa perpendicular e o raio de luz que incide na muralha, temos que $x(t) = 120\tan\left(\theta(t)\right)$. Derivando no instante t_0 em que o ponto iluminado da muralha dista 150m do farol obtemos $x'(t_0) = 120\sec^2(t_0)\theta'(t_0)$. Nesse instante temos $\sec^2(t_0) = (150/120)^2 = 25/16$ e $\theta'(t_0) = 4\pi$. Assim $x'(t_0) = 120 \times (25/16)4\pi = 750\pi$ (metros por minuto).

Teste 12 [`taxavar2`] Um farol, situado a uma distância de 120m de uma muralha, completa 3 voltas por minuto. Quando o facho de luz ilumina um ponto da muralha, situado a 150m do farol, a velocidade com que o ponto de luz varre a muralha é de



■ 1125π m/min.
B 750π m/min.
C 375π m/min.
D 150π m/min.
E 900π m/min.

Solução: Sendo $x(t)$ a posição do ponto de luz sobre a muralha, medida a partir da interseção dela com a sua perpendicular que passa pelo farol, e $\theta(t)$ o ângulo entre essa perpendicular e o raio de luz que incide na muralha, temos que $x(t) = 120\tan\left(\theta(t)\right)$. Derivando no instante t_0 em que o ponto iluminado da muralha dista 150m do farol obtemos $x'(t_0) = 120\sec^2(t_0)\theta'(t_0)$. Nesse instante temos $\sec^2(t_0) = (150/120)^2 = 25/16$ e $\theta'(t_0) = 6\pi$. Assim $x'(t_0) = 120 \times (25/16)6\pi = 1125\pi$ (metros por minuto).

Questão 1 (Valor: 1.4 pontos)**.** Calcule, justificando bem cada passagem, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[4]{x^4 - x^3} + x$.

Solução:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt[4]{x^4 - x^3} + x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{(x^4 - x^3)^{\frac{3}{4}} + (x^4 - x^3)^{\frac{1}{2}}(-x) + (x^4 - x^3)^{\frac{1}{4}}x^2 + (-x)^3} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-(1 - {}^1\!/_x)^{\frac{3}{4}} - (1 - {}^1\!/_x)^{\frac{1}{2}} - (1 - {}^1\!/_x)^{\frac{1}{4}} - 1} = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

pois $|x| = -x$, $|x^2| = x^2$ e ${}^1\!/_x \to 0$, quando $x \to -\infty$. $\square$

Questão 2 (Valor: 1.4 pontos)**.** Calcule, justificando bem cada passagem, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[4]{x^4 + x^3} + x$.

Solução:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt[4]{x^4 + x^3} + x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x^4 + x^3)^{\frac{3}{4}} + (x^4 + x^3)^{\frac{1}{2}}(-x) + (x^4 + x^3)^{\frac{1}{4}}x^2 + x^3} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-(1 + {}^1\!/_x)^{\frac{3}{4}} - (1 + {}^1\!/_x)^{\frac{1}{2}} - (1 + {}^1\!/_x)^{\frac{1}{4}} + 1} = -\frac{1}{4},\end{aligned}$$

pois $|x| = -x$, $|x^2| = x^2$ e ${}^1\!/_x \to 0$, quando $x \to -\infty$. $\square$

Questão 3 (Valor: 1.4 pontos)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)\sin\big(\tan(x)\big)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Calcule, caso exista, $f'(0)$.

Solução: Devemos verificar a existência (e finitude) do limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\sin\big(\tan(x)\big)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(2x)}{2x}\,\frac{\sin\big(\tan(x)\big)}{\tan x}\,\frac{\tan x}{x} = 2,$$

pois $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\big(\tan(x)\big)}{\tan x} = 1$, através do limite trigonométrico fundamental e das mudanças de variável $y = 2x$ e $y = \tan x$, respectivamente, e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\,\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Logo $f'(0) = 2$. $\square$

Questão 4 (Valor: 1.4 pontos)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)\sin\big(\tan(x)\big)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Calcule, caso exista, $f'(0)$.

Solução: Devemos verificar a existência (e finitude) do limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\sin\big(\tan(x)\big)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{3x}\,\frac{\sin\big(\tan(x)\big)}{\tan x}\,\frac{\tan x}{x} = 3,$$

pois $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\big(\tan(x)\big)}{\tan x} = 1$, através do limite trigonométrico fundamental e das mudanças de variável $y = 3x$ e $y = \tan x$, respectivamente, e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\,\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Logo $f'(0) = 3$. $\square$

2019 – MAT-2453 – Primeira Prova – Folha de Respostas

Respostas ilegíveis ou não indicadas nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ____________ **Turma:** ______

____
Assinatura

Por favor coloque seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as **primeiras colunas** em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas:

Teste 1: ■ B C D E

Teste 2: ■ B C D E

Teste 3: ■ B C D E

Teste 4: ■ B C D E

Teste 5: ■ B C D E

Teste 6: ■ B C D E

Teste 7: ■ B C D E

Teste 8: ■ B C D E

Teste 9: ■ B C D E

Teste 10: ■ B C D E

Teste 11: ■ B C D E

Teste 12: ■ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{E}}$