MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia I

$1^{\underline{o}}$ Semestre de 2011 - $2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

1. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de
$$f(x) = x^3 - 2x + 1 \ \text{ e } \ g(x) = -x + 1,$$
com $-1 \le x \ \le 1$.

2. Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de A, onde
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \ge x^2 - 4\},\ C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \le 12 - 3x^2\} \text{ e}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \le 3x^2 + 12x + 12\}.$$

3. Desenhe a região
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \ge x^2 - 1,\ y \le x + 1 \text{ e } y \ge -x^2 - 3x - 2\}$$
e calcule a sua área.

4. Sejam $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(x) \le 0$, para todo $x \in [-1, 3]$,
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \le x \le 3 \text{ e } y \ge f(x)\} \ \text{ e } \ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \le x \le 3 \text{ e } y \le x^2 + 3\}$$
tais que a área de $A \cap B$ seja igual a 23. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\, dx$.

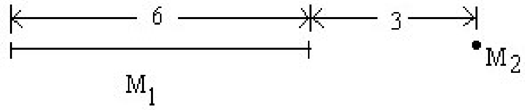
5. Determine $m > 0$ para que a área delimitada por $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ e a reta $y = mx$ seja igual a 4.

6. Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região.

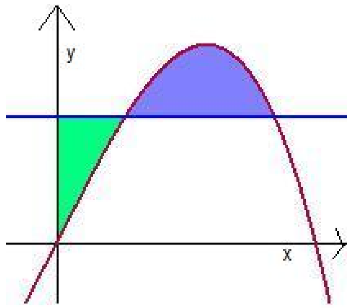
7. Encontre a área da região limitada entre as curvas $x = y^3 - y$ e $x = 1 - y^4$.

8. Calcule $\displaystyle\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})\, \mathrm{d}x$, interpretando-a como uma área.

9. Sabe-se que a intensidade da força de atração entre duas partículas é dada por
$$F = \frac{C m_1 m_2}{d^2}$$
onde C é uma constante, m_1 e m_2 são as massas das partículas e d é a distância entre elas. Uma barra linear homogênea de massa $M_1 = 18kg$ e uma massa pontual $M_2 = 2kg$ estão dispostas como na figura. Calcule a intensidade da força de atração entre as duas massas.



10. A reta horizontal $y = c$ intercepta a curva $y = 2x - 3x^3$ no primeiro quadrante como mostra a figura. Determine c para que as áreas das duas regiões sombreadas sejam iguais.



11. Sejam $y = f(x)$ dada por $f(x) = x^3 + \ln x$, $x > 0$ e $x = g(y)$ sua função inversa. Calcule $g'(y)$ em termos de $g(y)$. Calcule $g'(1)$.

12. Seja $h(x) = 2x + \cos x$.

   (a) Mostre que h é bijetora.

   (b) Calcule $h^{-1}(1)$.

   (c) Admitindo h^{-1} derivável, determine $(h^{-1})'(1)$.

13. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $\cosh(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (b) $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (c) $f(x) = e^{e^x}$

(d) $f(x) = x^e + e^x$ (e) $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

(g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$ (h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ (i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

(j) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$ (l) $f(x) = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\operatorname{sen} x}$

(m) $f(x) = (e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$ (n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$

(p) $f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen}(x^5)}$ (q) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$ (r) $f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$

(s) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

14. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

   (a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

   (b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

   (c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \leq |a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

   (d) $b^b - a^a > a^a(b - a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $1 \leq a < b$.

   (e) $e^x - e^y \geq x - y$, para todos x, y com $x \geq y \geq 0$.

15. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$ e seja g a sua inversa. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que

$$g(b) - g(a) \leq \frac{1}{2}(b - a).$$

16. Seja f uma função derivável no intervalo $]-1, +\infty[$. Mostre que se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \leq x$, para todos $x > 0$.

17. Mostre que $f(x) = (1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$. Conclua que

$$(1+\pi)^e < (1+e)^\pi.$$

18. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 1$

(b) $e^\pi > \pi^e$

(c) $\dfrac{\text{tg } b}{\text{tg } a} > \dfrac{b}{a}$ para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

(d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $x > 0$

(e) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$, para $x > 0$

(f) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$, para $x > 0$

19. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 é ponto de máximo local de g. Prove que

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 passa pela origem.

20. Determine a constante a para que $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ tenha:

(a) um mínimo local em $x = 2$.

(b) um mínimo local em $x = -3$.

(c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a.

21. Calcule, caso exista

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\text{tg}(\pi x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\text{cotg } x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} (\ln x)^{(x-1)}$

(e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{e^{x^2}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^p \ln x$, $p > 0$

(h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{p}{x}\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$

(j) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1}\right]$

(k) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x \operatorname{sen} x)^{\text{tg} x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (e^x + 3x)^{1/x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\text{tg}(x^2)}$

(n) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} + \ln x\right]$

(o) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

(p) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$

(q) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{sen} x}$

(r) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

(s) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\text{tg}\, x \sec x - \sec^2 x)$

(t) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{\ln 2/(1+\ln x)}$

(u) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (1+3x)^{1/\ln x}$

(v) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$

(w) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$

22. Determine c para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma única raiz real.

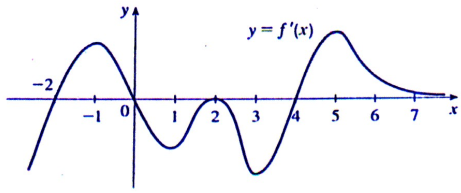
23. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

24. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{ax-1}{ax+1}\right)^x = 4$. Determine a.

25. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(b) Determine, em função de k, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

26. Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?

(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?

(c) Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo?

(d) Ache os pontos de inflexão de f.

(e) Admitindo que $f(0) = 0$, faça um esboço do possível gráfico de f.

27. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$.

(b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, para todos $a > 0$ e $b > 0$.

28. Seja f uma função. Se existir uma reta $y = mx + n$ tal que $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$, dizemos que $y = mx + n$ é uma **assíntota** para f. Prove que a reta $y = mx + n$ é uma assíntota para f se, e somente se, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = n$. (Tudo o que dissemos para $x \to +\infty$ vale também para $x \to -\infty$.)

29. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ (b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$ (f) $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ (h) $f(x) = e^x - e^{3x}$ (i) $f(x) = x - 3\ln x - \dfrac{2}{x}$

(j) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (k) $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ (l) $f(x) = x^x$

(m)$f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2 + 3)$ (n) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$ (o) $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2}$

(p) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$ (q) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$ (r) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$

(s) $f(x) = x^2 \ln x$ (t) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ (u) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

30. Achar os valores máximo e mínimo de:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$.

(b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, $-1 \leq x \leq 2$.

(e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$, $0 \leq x \leq 3$.

31. Para que números positivos a a curva $y = a^x$ corta a reta $y = x$?

32. Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que f tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

33. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que se $f'(a)f'(b) > 0$, então existe c entre a e b tal que $f(c) = 0$.

34. Para que valores de k a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três raízes reais distintas ?

35. Suponha que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ seja contínua, $f(0) = 1$ e que $f(x)$ é um número racional para todo $x \in [0,1]$. Prove que $f(x) = 1$, para todo $x \in [0,1]$.

36. Seja $f(x) = x^7 + 8x^3 - x^5 - 8x$. Prove que $f'(x)$ tem duas raízes distintas no intervalo $]-1,1[$.

37. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique.

   (a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) Se f é derivável até segunda ordem com $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   (c) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

   (d) Se existe uma assíntota para f (quando $x \to +\infty$) com coeficiente angular m e se existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = L$, então $L = m$.

   (e) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R},\ m \neq 0$ então f tem uma assíntota com coeficiente angular igual a m.

38. Suponha que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e que $0 \le f(x) \le 1$, para todo $x \in [0,1]$. Prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

39. Prove que se p é um polinômio, a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções reais.

40. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e com um único ponto crítico x_0. Prove que se x_0 for ponto de mínimo (máximo) local de f, então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f.

41. No seu livro de Cálculo de 1696, l'Hôpital ilustrou sua regra com o limite da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

   quando $x \to a$, $a > 0$. Calcule este limite.

42. Considere a parábola $y = bx^2$ com $b \ge 1$.

   (a) Determine, em termos de b, a área da região compreendida entre essa parábola e a reta $y = x$, para $x \in [0,1]$.

   (b) Determine $b \in [1,3]$ de modo que a área seja máxima. Justifique!

43. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

44. Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos de (0,1).

45. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

46. Qual é o menor valor da constante a para o qual a desigualdade $ax + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2}$ é válida para todo número positivo x?

47. Seja $f(x) = 5x^2 + \dfrac{a}{x^5}$, $x > 0$, onde $a > 0$. Ache o menor valor de a de modo que $f(x) \geq 28$, $\forall x > 0$.

48. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?

49. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?

    (b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.

50. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é $2/3$ da altura do triângulo.

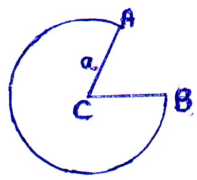
51. Um canhão situado no solo é posto sob um ângulo de inclinação θ. Seja r o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bala. Então r é dado por $r = \dfrac{2v^2}{g} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

52. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.

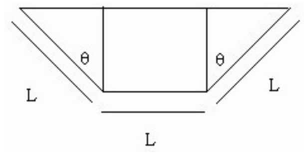
53. Deseja-se construir uma esfera e um cubo de modo que a soma das áreas de suas superfícies seja igual a 2. Determine o raio da esfera que maximiza e o que minimiza a soma de seus volumes.

54. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro?

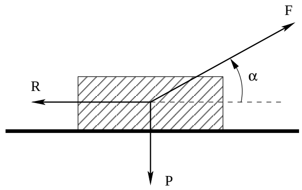
55. Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB. Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima.



56. Um reservatório tem fundo horizontal e seção transversal como se mostra na figura. Achar a inclinação dos lados com a vertical de modo a obter a máxima capacidade.



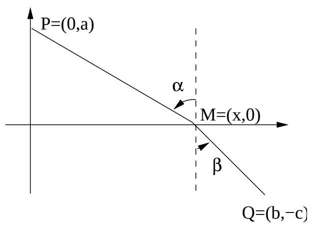
57. Um corpo de peso P apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força de intensidade F. Qual o ângulo α com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito $\mu > 0$?



OBSERVAÇÃO. Para cada $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fixo, o valor mínimo da força F para movimentar o bloco é tal que a diferença entre a componente horizontal de F e a força de atrito R seja positiva, i.e. $F \cos\alpha - \mu(P - F \sin\alpha) \geq 0$, ou seja, $F \geq \frac{\mu P}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$.

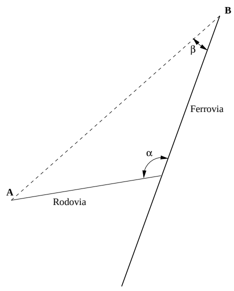
58. (LEI DE REFRAÇÃO DE SNELLIUS) O objetivo desta questão é demonstrar como a *lei da refração de Snellius*, da Óptica Geométrica, pode ser obtida como conseqüência do *princípio de Fermat*, segundo o qual "a trajetória dos raios de luz é aquela que minimiza o tempo de percurso".

Sejam $P \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano superior e $Q \in \mathbb{R}^2$ um ponto no semi-plano inferior, fixos (vide figura abaixo). Uma partícula vai de P a um ponto $M = (x, 0)$ sobre o eixo Ox com velocidade constante u e movimento retilíneo; em seguida, vai de M até Q com velocidade constante v, também em movimento retilíneo. Seja $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $T(x)$ é o tempo de percurso de P a Q. Mostre que T possui um único ponto de mínimo $x_0 \in \mathbb{R}$. Verifique que $x_0 \in (0, b)$ e que, se $x = x_0$, então $\dfrac{\sin\alpha}{u} = \dfrac{\sin\beta}{v}$.



OBSERVAÇÃO. A *lei da reflexão plana* também pode ser obtida como conseqüência do mesmo princípio (verifique!).

59. Deve-se construir uma estrada ligando uma fábrica A a uma ferrovia que passa por uma cidade B. Assumindo-se que a estrada e a ferrovia sejam ambas retilíneas, e que os custos de frete por unidade de distância sejam m vezes maiores na estrada do que na ferrovia, encontre o ângulo α a que a estrada deve ser conectada à ferrovia de modo a minimizar o custo total do frete da fábrica até a cidade. Assuma $m > 1$.



60. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina?

Respostas

1. $\dfrac{1}{2}$ **2.** $\dfrac{104}{3}$ **3.** $\dfrac{107}{24}$ **4.** $-\dfrac{5}{3}$ **5.** $m = 2$ **6.** $\dfrac{27}{4}$ **7.** $\dfrac{8}{5}$ **8.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ **9.** $\dfrac{4}{3}C$ **10.** $c = \dfrac{4}{9}$

11. $g'(1) = \dfrac{1}{4}$ **12.** (b) 0; (c) $\dfrac{1}{2}$ **20.** (a) $a = 16$; (b) $a = -54$

21. (a) 0, (b) 0, (c) 0, (d) 1, (e) 0, (f) 0, (g) 0 (h) p, (i) $\frac{1}{6}$, (j) 1, (k) 1, (l) e^4, (m) 1 (n) $+\infty$, (o) $\dfrac{2}{3}$, (p) 1, (q) e^2, (r) 3, (s) $-\dfrac{1}{2}$, (t) 2, (u) e, (v) e, (w) 1.

22. $c < -27$ ou $c > 5$ **24.** $a = -\dfrac{1}{\ln 2}$

25. Não há soluções se $k < 0$; tem 1 solução se $k = 0$ ou $k > \dfrac{4}{e^2}$; tem 2 soluções se $k = \dfrac{4}{e^2}$; tem 3 soluções se $0 < k < \dfrac{4}{e^2}$.

27. (a) $x_0 = 1$

30. (a) $-1; \sqrt{2}$ (b) $\sqrt{\frac{17}{8}}; \sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$ (c) 4; 1 (d) $\sqrt[3]{-3}; 0$ (e) $0; 27$

31. $a \leq e^{\frac{1}{e}}$ **34.** $4 < k < 5$

37. As afirmações (b) e (d) são **verdadeiras** e (a), (c) e (e) são **falsas**.

41. $\dfrac{16a}{9}$ **42.** (a) $A(b) = \dfrac{1}{3b^2} + \dfrac{b}{3} - \dfrac{1}{2}$; (b) $b = 3$

43. $(5, 0)$ e $(-5, 0)$

44. $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

46. $a = 2$

47. $a = 2^8$

48. $\frac{\pi}{4}$

49. (a) 1; (b) $4/\pi$

50. (a) Deve-se formar apenas um quadrado;
(b) o lado do quadrado é $\frac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$.

51. $\theta = \frac{\pi}{4}$

52. altura: 4; raio: $2\sqrt{2}$

53. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$

54. $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$

55. $\sqrt{2}$

56. $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

57. $\operatorname{arctg} \mu$

59. $\pi - \max\{\beta, \arccos(\frac{1}{m})\}$

60. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$