O Triedro de Frenet

MAT–2454 - Cálculo Diferencial e Integral II

Daniel Victor Tausk

Seja $\gamma : I \to I\!R^3$ uma curva de classe C^3 definida num intervalo $I \subset I\!R$. Assuma que γ é *regular*, ou seja, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Fixamos $t_0 \in I$ e para cada $t \in I$ definimos:

$$s = \sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| \, \mathrm{d}u. \tag{1}$$

Para $t \geq t_0$, $\sigma(t)$ é igual ao comprimento da curva γ restrita ao intervalo $[t_0, t]$ e para $t < t_0$, $\sigma(t)$ é igual a menos o comprimento da curva γ restrita ao intervalo $[t, t_0]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (segunda versão), temos:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sigma'(t) = \|\gamma'(t)\|.$$

Escrevemos também $\vec{r} = \gamma(t)$, de modo que $\gamma'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ e portanto:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \Big\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\Big\|. \tag{2}$$

Como $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, temos que $\sigma'(t) > 0$ para todo $t \in I$; segue que $\sigma : I \to I\!R$ é uma função estritamente crescente e portanto podemos considerar sua inversa σ^{-1}, que é uma função de classe C^3 definida no intervalo $\sigma(I)$. Em outras palavras, podemos reescrever a identidade $s = \sigma(t)$ colocando t em função de s, obtendo $t = \sigma^{-1}(s)$; temos:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^{-1}.$$

Substituindo $t = \sigma^{-1}(s)$ em $\vec{r} = \gamma(t)$, obtemos uma expressão para $\vec{r}$ em função do parâmetro s; de modo mais preciso, consideramos a função composta $\mu = \gamma \circ \sigma^{-1}$ e obtemos uma curva $\vec{r} = \mu(s)$. Note que:

$$\mu'(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\,\Big\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\Big\|^{-1}, \tag{3}$$

ou seja, $\mu'(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$ é o versor do vetor tangente $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ à curva γ. Em particular $\|\mu'(s)\| = 1$. Dizemos que a curva μ é *uma reparametrização por comprimento de arco* de γ.

1. **Exemplo.** Seja $\gamma : I\!R \to I\!R^3$ definida por:

$$\vec{r} = \gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t, 0), \tag{4}$$

onde $R > 0$ é uma constante fixada. Temos que γ parametriza uma circunferência de raio R e centro na origem, contida no plano $z = 0$. Temos

$\gamma'(t) = (-R\,\mathrm{sen}\, t, R\cos t, 0)$ e portanto $\|\gamma'(t)\| = R$. Tomando $t_0 = 0$ e usando (1) obtemos:

$$s = \sigma(t) = \int_0^t R\,\mathrm{d}u = Rt.$$

Logo $t = \frac{s}{R}$. Substituindo essa relação em (4) obtemos:

$$\vec{r} = \mu(s) = \big(R\cos\tfrac{s}{R}, R\,\mathrm{sen}\,\tfrac{s}{R}, 0\big),$$

onde $\mu = \gamma \circ \sigma^{-1}$. A curva μ é uma reparametrização por comprimento de arco da curva γ. Embora os cálculos envolvidos neste exemplo tenham sido muito simples, observamos que na maioria dos casos é muito difícil obter uma expressão explicíta para uma reparametrização por comprimento de arco de uma dada curva regular γ.

Se interpretamos $\vec{r} = \gamma(t)$ como sendo a posição no instante t de um corpo que se movimenta pelo espaço $I\!R^3$ então $s = \sigma(t)$ é a distância percorrida por esse corpo desde o instante t_0 até o instante t, para $t \geq t_0$ (e $s = \sigma(t)$ é igual a menos a distância percorrida desde o instante t até o instante t_0, para $t < t_0$). Definimos:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$

Note que, na interpretação física, $\vec{v}$ é a *velocidade vetorial*, $\vec{a}$ é a *aceleração vetorial*, v é a *velocidade escalar* e a é a *aceleração escalar* do corpo. Com a terminologia introduzida acima, a identidade (2) fica:

$$\|\vec{v}\| = v,$$

ou seja, *a norma da velocidade vetorial coincide com a velocidade escalar.* Como veremos abaixo, não é verdadade em geral que a norma da aceleração vetorial coincide com a aceleração escalar.

Definimos agora:

$$\boxed{T = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\ .}$$

Como vimos em (3), T é simplesmente o versor do vetor tangente $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, ou seja:

$$\boxed{T = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}\ .} \tag{5}$$

Chamamos T o *vetor tangente unitário* à curva $\vec{r} = \gamma(t)$. Derivando a identidade $T \cdot T = 1$ com respeito a s obtemos:

$$2\,T \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = 0,$$

ou seja, o vetor $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ é normal ao vetor T (e portanto a $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$). O vetor $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ em geral não é unitário; sua norma mede, intuitivamente, o quanto o vetor tangente unitário T muda de direção. Definimos:

$$\boxed{\kappa = \left\| \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} \right\|;}$$

chamamos κ a *curvatura* da curva $\vec{r} = \gamma(t)$.

Vamos agora obter uma fórmula para a aceleração vetorial $\vec{a}$. De (5) vem $\vec{v} = vT$; derivando essa identidade com respeito a t obtemos:

$$\vec{a} = aT + v\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = aT + v\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Logo:

$$\vec{a} = aT + v^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}. \tag{6}$$

Note que, como $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ é normal a T, a identidade (6) nos diz que $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} \ne 0$ se e somente se os vetores $\vec{a}$ e T são linearmente independentes, ou seja:

$$\boxed{\kappa \ne 0 \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} \ne 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \text{ e } \vec{v} \text{ são linearmente independentes.}}$$

Vamos assumir a partir de agora que o vetor $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ não é nulo. Denotaremos por N o versor $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\left\|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right\|^{-1}$ do vetor $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$. Chamaremos N o *vetor normal unitário* à curva $\vec{r} = \gamma(t)$. Temos obviamente:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \kappa N.} \tag{7}$$

Levando em conta (7), a identidade (6) nos dá:

$$\vec{a} = aT + v^2\kappa N. \tag{8}$$

Fisicamente, a identidade (8) nos diz que a aceleração vetorial $\vec{a}$ tem duas componentes; uma tangente ao movimento (ou seja, paralela a T), com norma igual à aceleração escalar a. A outra é normal ao movimento (ou seja, paralela a N) e possui norma igual a $v^2\kappa$. A componente normal ao movimento é normalmente conhecida como *aceleração centrípeta*. Escrevendo $R = \frac{1}{\kappa}$ obtemos a fórmula mais familiar $\frac{v^2}{R}$ para a norma da aceleração centrípeta; o escalar R é conhecido como o *raio de curvatura* da curva $\vec{r} = \gamma(t)$. Observamos que o raio de curvatura de uma circunferência coincide com seu raio (verifique!).

Usando (8) fica fácil obter uma expressão para a velocidade escalar a; de fato, multiplicando (8) escalarmente por T e usando (5) obtemos:

$$a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v}. \tag{9}$$

Denotamos por B o produto vetorial de T por N, ou seja:

$$\boxed{B = T \wedge N.} \tag{10}$$

Como T e N são unitários e normais, temos que o vetor B também é unitário. Além do mais, a trinca (T, N, B) é uma *base ortonormal positivamente orientada* de $\mathbb{R}^3$. O vetor B é chamado o *vetor binormal* à curva $\vec{r} = \gamma(t)$ e a base (T, N, B) é chamada o *triedro de Frenet–Serret* da curva $\vec{r} = \gamma(t)$. Multiplicando a identidade (8) vetorialmente por $\vec{v} = vT$ obtemos:

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = (vT) \wedge (aT) + (vT) \wedge (v^2 \kappa N) = v^3 \kappa B.$$

Como $\|B\| = 1$, $v > 0$ e $\kappa > 0$ concluímos que $\|\vec{v} \wedge \vec{a}\| = v^3 \kappa$, ou seja:

$$\boxed{\kappa = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}{v^3} = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}\ ,} \tag{11}$$

o que nos dá uma expressão para a curvatura κ que envolve apenas derivadas de $\vec{r}$ com respeito ao parâmatro t. Note que de (5) e (8) podemos obter também uma expressão para o vetor N:

$$N = \frac{v\vec{a} - a\vec{v}}{v^3 \kappa} = \frac{v\vec{a} - a\vec{v}}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}, \tag{12}$$

onde a pode ser calculado usando (9). Usando (5), (10) e (12) obtemos a seguinte expressão para a binormal B:

$$\boxed{B = \frac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|} = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}\ .} \tag{13}$$

Na prática, em vez de usar (12), é mais simples calcular N usando (5) e (13), levando em conta que:

$$\boxed{N = B \wedge T.} \tag{14}$$

Nosso objetivo agora é obter as coordenadas das derivadas $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$, $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}$ e $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}$ na base (T, N, B). Note que essa tarefa já foi realizada para a derivada $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ (vide (7)). Vamos então determinar as coordenadas de $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}$ na base (T, N, B); note que, como essa base é ortonormal, essas coordenadas são dadas por $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} \cdot T$, $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} \cdot N$ e $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} \cdot B$. Derivando as identidades $N \cdot N = 1$ e $N \cdot T = 0$ com respeito a s obtemos:

$$2\, N \cdot \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} \cdot T + N \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = 0.$$

Usando (7) obtemos:

$$N \cdot \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = 0, \quad T \cdot \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = -\kappa. \tag{15}$$

A componente de $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}$ na direção da binormal B será chamada a *torção* da curva $\vec{r} = \gamma(t)$ e será denotada por τ; temos então:

$$\boxed{\tau = B \cdot \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}\ .} \tag{16}$$

De (15) e (16) vem:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = -\kappa T + \tau B.} \tag{17}$$

Finalmente, calculamos as coordenadas de $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s}$ na base (T, N, B). Para isso, derivamos as identidades $B \cdot T = 0$, $B \cdot N = 0$ e $B \cdot B = 1$ com respeito a s obtendo:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s} \cdot T = -B \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = -B \cdot (\kappa N) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s} \cdot N = -B \cdot \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = -\tau,$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s} \cdot B = 0.$$

Logo:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}s} = -\tau N.} \tag{18}$$

As identidades (7), (17) e (18) são conhecidas como as *equações de Frenet–Serret*.

Vamos agora obter uma fórmula para a torção τ que envolva apenas derivadas de $\vec{r}$ com respeito ao parâmetro t. Derivamos a identidade (8) com respeito a t:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}T + a\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(v^2\kappa)}{\mathrm{d}t}N + v^2\kappa\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}T + a\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(v^2\kappa)}{\mathrm{d}t}N + v^2\kappa\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}T + av\kappa N + \frac{\mathrm{d}(v^2\kappa)}{\mathrm{d}t}N + v^3\kappa\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}.
\end{aligned}$$

Na última igualdade acima utilizamos (7). Multiplicando as expressões acima escalarmente por B e levando em conta (16) obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \cdot B = v^3\kappa\tau.$$

Usando (13) chegamos a:

$$\frac{1}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{a}) = v^3\kappa\tau.$$

Da identidade acima e de (11) obtemos finalmente a seguinte expressão para a torção:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|^2}\,\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{a}) = \frac{\gamma''' \cdot (\gamma' \wedge \gamma'')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}\ .} \tag{19}$$

2. Exemplo. Seja $\gamma : I\!R \to I\!R^3$ definida por:

$$\vec{r} = \gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t, ct),$$

onde $R > 0$ e $c \in I\!R$ são constantes fixadas. Temos que $\vec{r} = \gamma(t)$ descreve o movimento de um corpo cuja sombra no plano $z = 0$ movimenta-se pela circunferência de centro na origem e raio R em movimento circular uniforme; a sombra do corpo no eixo z segue um movimento retilíneo uniforme com velocidade igual a c vezes a velocidade angular da sombra no plano $z = 0$. Temos:

$$\gamma'(t) = (-R\,\mathrm{sen}\, t, R\cos t, c), \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + c^2}.$$

Usando (5) obtemos:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2}}\,(-R\,\mathrm{sen}\, t, R\cos t, c).$$

Temos também:

$$\gamma''(t) = (-R\cos t, -R\,\mathrm{sen}\, t, 0),$$
$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (Rc\,\mathrm{sen}\, t, -Rc\cos t, R^2),$$
$$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = R\sqrt{R^2 + c^2}.$$

De (11) obtemos então:

$$\kappa(t) = \frac{R}{R^2 + c^2},$$

e de (13) obtemos:

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2}}\,(c\,\mathrm{sen}\, t, -c\cos t, R).$$

Podemos agora calcular N usando (14):

$$N(t) = (-\cos t, -\mathrm{sen}\, t, 0),$$

e calcular τ usando (19):

$$\tau(t) = \frac{c}{R^2 + c^2}.$$

Observamos que a curvatura κ e a torção τ da curva γ são constantes. Esse fenômeno é uma particularidade deste exemplo; em geral, a curvatura e a torção de uma curva $\vec{r} = \gamma(t)$ são funções do parâmetro t.